1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

位相優先分割統治法による3次元凸包の構成

02601700　東京大学　＊皆川 剛　MINAKAWA Tsuyoshi
01203740　東京大学　杉原 厚吉　SUGIHARA Kokichi

1　はじめに

計算幾何学における多くのアルゴリズムは，計算誤差がないことを前提に構成されているが，現実の世界ではこれらのアルゴリズムは計算誤差によって破綻してしまうことが少なくない．それを防ぐために，数値計算には誤差が伴うという前提のもとで，計算結果より対象の位相構造の方を優先させてアルゴリズムを構成するという考え方が杉原らによって提唱されている [1].

3次元凸包の構成法のうち包装法と逐次添加法については，この考え方(以下，位相優先法と呼ぶ)に基づくアルゴリズムが既に知られている [1][2]．分割統治法によるものも提案されている [1] が，時間計算量の面で従来のものに及ばなかった．そこで本発表では，時間計算量を従来のものと同じ $\mathrm{O}(n \log n)$(つまり2つの凸包の併合手続きが $\mathrm{O}(n)$)とした位相優先分割統治法による3次元凸包の構成法について述べる．以下で提案するアルゴリズムは，次の二つの性質を持つ．

- いかなる入力に対しても球面と同相な出力を出す．計算誤差によって無限ループに陥ったり異常終了したりしない．(この性質を持つアルゴリズムは「頑健である」という．)
- 出力は何らかの点集合の凸包と同じ位相的構造を持つ．(この性質を持つアルゴリズムは「位相的に無矛盾である」という．)なお，計算誤差がない場合には正しい解を出力する．

凸包のデータ構造としては，二重連結枝リストを用いる．簡単のため，縮退がなく，したがって凸包のすべての面が三角形で構成されることを仮定する．また，凸包 P の頂点の集合を V，辺の集合を E とするとき，この凸包を $P=(V,E)$ で表す．

2　位相優先アルゴリズム

以下に，従来の併合手続き MERGE() を示す [3]．この手続きの基本方針は，二つの凸包 $P_1=(V_1,E_1)$, $P_2=(V_2,E_2)$ の併合に際して，二つの(単純とは限らない)閉路 $C_1(\subseteq E_1)$, $C_2(\subseteq E_2)$ の間を橋渡しするように三角形の面を張っていき，その結果できる円筒状の立体 T の影になっている部分を取り除く，というものである．

function MERGE(P_1,P_2)

Step 1　T の辺 $e_0=(a_0,b_0)$ $(a_0 \in V_1,\ b_0 \in V_2)$ を求める．$e \leftarrow e_0$.

Step 2　e の両端点において，P_1 側，P_2 側から使う辺の候補を1本ずつ選出する．

Step 3　P_1 側，P_2 側の候補の辺のうち，どちらを採用するか決定し，併合辺を張る．この辺を新たに e とする．e が e_0 に一致していれば，できた凸包を返して終了．そうでなければ，**Goto** Step 2.

これを位相優先タイプのアルゴリズムに改良しよう．変更点は以下の通りである．ただし，以下で「青辺」とは C_1, C_2 に属することが決定した辺のことであり，「緑辺」とは青辺とともに(有向) closed path を張り続けるための補助の辺のことである．ただし，どちらの色の辺も有向辺とする．

- Step 1が終わったら，a_0 から見える P_2 の三角形面を見つけて，その3辺が外周となるように P_2 を平面に埋め込み，外周の3辺を緑色にして，緑辺による(有向) closed path を作る．P_1 についても同様の操作をする．
- Step 2において使う辺の候補を決める時に，「青辺を越えて選ぶことはない」という規則を付け加える．(図1参照)
- 青辺と緑辺とが一致した場合には，青辺で上書きする．新しい青辺が決まるたびに，グラフ(Step 2で辺が消去されている)の外周に沿って緑辺を更新する．(図2参照)
- 終了前に以下の操作を行なう．

  Step 4　併合辺が多重辺であった場合，e_0 を含まない側の立体を捨てる．

3　アルゴリズムの正当性

以下，このアルゴリズムが頑健で，位相的に無矛盾であることを示す．

まず，「緑辺は位相優先にするときに加えた規則に従って青辺になり得る可能性のある辺である」ということが容易に示せる．このアルゴリズムは，算法の開始時に closed path を張っておき，それを更新しながら徐々に目的の closed path に近づけていく，というものであるから，緑辺が青辺の候補として保証されているということは，つまりこのアルゴリズムが計算誤差によって誤った判定をしてしまった場合にも必ず終了することが保証されているということに他ならない．

ところで，このアルゴリズムの出力が平面グラフとなることは明らかである．また，位相優先にするときに，併合辺が多重辺となる部分については一方の立体だけを持ってきているので，出力のグラフが平面グラフであるという前提のもとで 3− 連結性も容易に示すことができる．よって，「グラフ G が有界な凸多面体の頂点と稜線の作るグラフであるのは，G が 3− 連結平面グラフのとき，かつそのときに限る」という Steinitz の定理より，このアルゴリズムは頑健で，かつ位相的に無矛盾なものとなっていることがわかる．

4　併合操作の時間計算量について

緑辺はアルゴリズムの正当性を示すためだけに必要な辺であり，実際には緑辺に関する部分を取り除いてしまっても正常に動作することに注意する．基本的な併合操作は従来のものと同じであり，付け加えた規則については条件文を 1 つ増やすだけで済むので，位相優先版においても，Step 3 までは $O(n)$ でできる．Step 4 については，$n \times n$ の配列を用意 (ただし初期化はしない) し，併合辺を 2 度走査することで，$O(n)$ で終了するような算法を構成できる．また，併合辺が高々 $3n$ 本しかないことを考えると，$O(n)$ の記憶領域と適当なハッシュ関数を用いて Step 4 の操作を行なうことも可能である．この場合の時間計算量は平均 $O(n)$ となる．

参考文献

[1] 杉原厚吉：計算幾何工学，アドバンスト エレクトロニクス シリーズ II − 2，培風館，1994.

[2] 佐々木建昭, 今井浩, 浅野孝夫, 杉原厚吉: 計算代数と計算幾何, 岩波講座 応用数学 5 [方法 9], 岩波書店, 1993, pp. 152–157.

[3] F. P. Preparata, M. I. Shamos, (浅野孝夫, 浅野哲夫 訳)：計算幾何学入門，総研出版，1992, pp. 147–168.

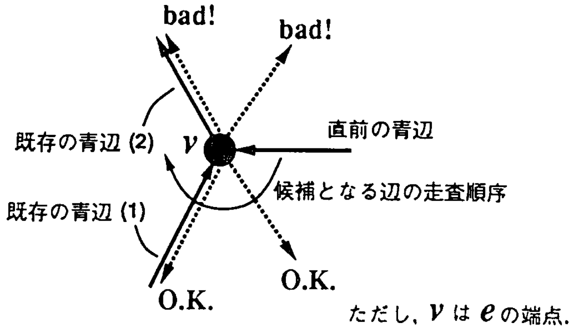

図 1　候補となる辺の選択規則

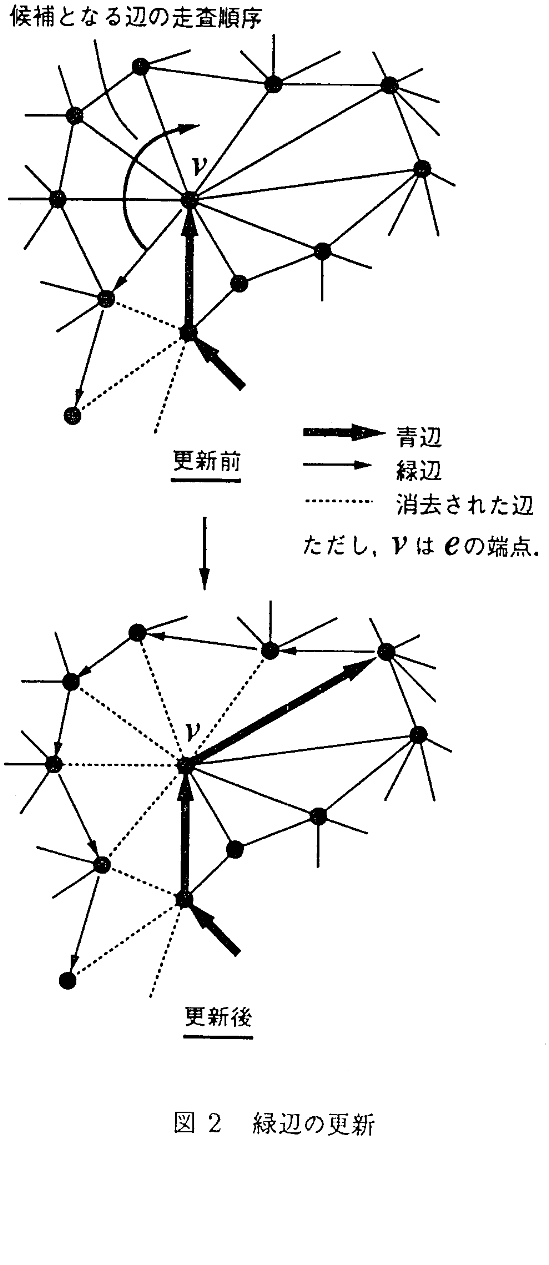

図 2　緑辺の更新