日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

独占市場における数量割引問題に関する最適割引率の決定
— 特別展示商品を対象とした場合 —

01110624 流通科学大学情報学部 * 川勝 英史 KAWAKATSU Hidefumi
01105054 兵庫県立大学経営学部 菊田 健作 KIKUTA Kensaku
01204194 神戸学院大学経営学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki

1. はじめに

卸売業では，在庫として凍結されている資産を極力小さく抑えるために，Quantity Discount（数量割引）を実施するすることが少なくない [1]. 数量割引には，取引数量に応じた割引率を設定することにより，小売業に当初予定していた発注量よりも大きな量を発注させるよう促す効果がある．ここでは，小売業が特別展示商品 [2, 3] として販売するような製品を対象とし，小売業は，卸売業に提示された「取引数量」と，この量に応じた「割引率」とをもとに数量割引を利用するかどうかを決定するような場合を考える．以下では，問題を卸売業と小売業間の Stackelberg ゲーム [4] として把握することにより卸売業の単位時間当たり総利益を最大にするという意味での最適取引数量並びに最適割引率を決定するようなモデルを提案する．

2. 記号と仮定

本研究で主に用いる記号は次の通りである．a_s : 卸売業の1回当たり発注費用．a_b : 小売業の1回当たり発注費用．h_s : 卸売業の単位在庫当たり単位時間当たり在庫維持管理費用．h_b : 小売業の単位在庫当たり単位時間当たり在庫維持管理費用．y : 割引率．x : 割引率 y に応じた取引数量を与える係数．p_s : 卸売業の単位商品当たり販売価格であり，小売業の単位商品当たり購入費用．p_b : 小売業の単位商品当たり販売価格．c_s : 卸売業の単位商品当たり購入費用．Q : 小売業の最大在庫量．Q_0 : 小売業の発注点．Q_U : 小売業の在庫量の上限．λ : 変動需要量を与える比例定数（$\lambda > 0$）．μ : 小売業の単位時間当たり固定需要量．

また，本研究での仮定は次の通りである．(1) 独占市場を考える．(2) 商品の需要量は確定的である．但し，小売業が店舗に商品を陳列する際，商品の展示量が大きいほど良く売れ，少なくなると余り売れなくなる．(3) $\beta = (p_b - p_s)\lambda - h_b > 0$ である [3]. (4) 卸売業の提示する取引数量は $Q_U - (1-x)Q_0$ である．この理由については，3. で説明する．(5) 卸売業が割引率 y 及び取引数量を与える係数 x を提示したとき，小売業は，在庫量が $(1-x)Q_0$ まで減少した時点で $Q_U - (1-x)Q_0$ なる量を発注する．(6) 卸売業の1回当たり発注量は $N_i[Q_U - (1-x)Q_0]$ $(i = 1, 2)$ である．ここに，N_1 及び N_2 は，それぞれ，小売業が数量割引を利用しない場合，数量割引を利用する場合の卸売業の発注量を与える係数である．

3. 小売業の単位時間当たり総利益

特別展示商品のような商品を対象とした場合の小売業に対して，単位時間当たり総利益を最大にするという意味での最適最大在庫量 $Q = Q^*$ 並びに最適発注点 $Q_0 = Q_0^*$ を求めるためのモデルが提案されている [2, 3]. また，仮定 (3) のもとでは，この単位時間当たり総利益を最大にするような $Q = Q^*$ は Q_U となることが知られている [2, 3]. この理由により，以下では Q を Q_U に置き換えて解析を行うことにし，仮定 (4) で述べたように，小売業の1回当たり発注量を $Q_U - (1-x)Q_0$ で表すことにする．

このとき，数量割引を利用しない場合の小売業の単位時間当たり総利益は

$$\pi_1(Q_0) = \frac{\beta(Q_U - Q_0) - a_b\lambda}{\ln(Q_U + \rho) - \ln(Q_0 + \rho)} + h_b\rho \quad (1)$$

で与えられる．但し，$\rho = \mu/\lambda$ である．ここで，式 (1) の $\pi(Q_0)$ を最大にするような $Q_0 = Q_0^*$ は次の通りである [2].

(i) $\rho \ln \frac{Q_U+\rho}{\rho} - Q_U < -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ のとき，$Q_0^* > 0$ $(< Q_U)$ が唯一存在し，$\pi_1(Q_0^*) = \beta Q_0^* + (p_b - p_s)\lambda\rho$ を得る．

(ii) 他の場合には，$Q_0^* = 0$ であり，$\pi_1(Q_0^*) = \pi_1(0)$ である．

また本研究では，数量割引を利用した場合に得られる小売業の単位時間当たり総利益を次式のように与えることができる．

$$\pi_2(Q_0^*, x, y) = \frac{(\beta + yp_s\lambda)[Q_U - (1-x)Q_0^*] - a_b\lambda}{\ln(Q_U + \rho) - \ln[(1-x)Q_0^* + \rho]} + h_b\rho \quad (2)$$

4. 卸売業の単位時間当たり総利益

小売業が数量割引を利用しない場合，卸売業の単位時間当たり総利益は

$$P_1(N_1, Q_0^*) = \lambda \frac{(p_s - c_s)(Q_U - Q_0^*) - \frac{a_s}{N_1}}{\ln(Q_U + \rho) - \ln(Q_0^* + \rho)} - \frac{h_s}{2}(Q_U - Q_0^*)(N_1 - 1) \quad (3)$$

で与えられる．これに対し，小売業が数量割引を利用する場合には次式が成立する．

$$\begin{aligned} &P_2(N_2, Q_0^*, x, y) \\ &= \lambda \frac{[p_s(1-y)-c_s][Q_U-(1-x)Q_0^*]-\frac{a_s}{N_2}}{\ln(Q_U+\rho)-\ln[(1-x)Q_0^*+\rho]} \\ &\quad -\frac{h_s}{2}[Q_U-(1-x)Q_0^*](N_2-1) \end{aligned} \tag{4}$$

5. 小売業の最適反応

小売業のオプションを次のように定義する．

オプション A_1： 数量割引を利用しない．

オプション A_2： 数量割引を利用する．

ここで

$$\psi(x) \equiv \frac{\beta}{p_s\lambda}\left[\frac{(Q_0^*+\rho)\ln\frac{Q_U+\rho}{(1-x)Q_0^*+\rho}+\frac{a_b\lambda}{\beta}}{Q_U-(1-x)Q_0^*}-1\right] \tag{5}$$

とおき，領域 Ω_i $(i=1,2)$ を次のように定義する．

(1) $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{a_b\lambda}{\beta}$ のとき，

$\Omega_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\le\psi(x)\right\}$，$\Omega_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\ge\psi(x)\right\}$

(2) 他の場合，

$\Omega_1=\left\{y\,\middle|\,y=0\right\}$，$\Omega_2=\left\{y\,\middle|\,y\ge 0\right\}$

なお，$\psi(x)$ は，A_1, A_2 の無差別曲線であり，x $(0\le x\le 1)$ に対して $\psi'(x)\ge 0$ より $\psi''(x)>0$ である．

このとき，小売業の最適反応は次のようになる．

(a) $(x,y)\in\Omega_1\setminus\Omega_2$ ならば，$A_1\succ A_2$ である．

(b) $(x,y)\in\Omega_2\setminus\Omega_1$ ならば，$A_2\succ A_1$ である．

(c) $(x,y)\in\Omega_1\cap\Omega_2$ ならば，$A_1\sim A_2$ である．

ここに，$m\succ n$ は n より m が選好されることを意味し，$n\sim m$ は n と m とが無差別であることを意味する．

6. 最適戦略

$(x,y)\in\Omega_1\setminus\Omega_2$ のとき，小売業は数量割引を利用しない．このとき，卸売業の単位時間当たり総利益は式 (3) で与えられる．また，$(x,y)\in\Omega_2\setminus\Omega_1$ のとき，小売業は数量割引を利用することになり，卸売業の最適政策 (x^*,y^*) は以下のようになる．

(1) $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合：

ここでは，$N_1^*\ge 2$ の場合の解析には相当な困難を伴うため，$N_1^*=1$ の場合に焦点を絞る．

i) $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U\ge-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$，または，$\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$ かつ $a_s>(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}+[\lambda(p_s-c_s)+\beta]x^*Q_0^*\frac{1}{\lambda}\ln\frac{Q_U+\rho}{Q_0^*+\rho}$ のとき：

このとき，$P_2(N_2^*,Q_0^*,x^*,y^*)>P_1(N_1^*,Q_0^*)$ である．従って，小売業が数量割引を利用するよう (x,y) を設定することが得策となる．なお，式 (4) の $P_2(N_2^*,Q_0^*,x,y)$ を最大にする (x^*,y^*) は次の通りである．

a. $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U\ge-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$ の場合：

この場合，$x^*\to 1-0$，$y^*\to\psi(1)+0$ である．

b. $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$ かつ $a_s>(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}+[\lambda(p_s-c_s)+\beta]x^*Q_0^*\frac{1}{\lambda}\ln\frac{Q_U+\rho}{Q_0^*+\rho}$ の場合：

この場合，無差別曲線上の卸売業の利益 $P_2(N_2^*,Q_0^*,x,\psi(x))$ を唯一最大にする $x=x^o$ が存在し，$x^*\to x^o-0$，$y^*\to\psi(x^o)+0$ である．また，卸売業の単位時間当たり総利益の最大値は $P_2(N_2^*,Q_0^*,x^*,y^*)=\lambda(p_s-c_s)[(1-x)\,Q_0^*+\rho]-\beta x^*Q_0^*$ で与えられる．

ii) $(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}<a_s<(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}+[\lambda(p_s-c_s)+\beta]x^*Q_0^*\frac{1}{\lambda}\ln\frac{Q_U+\rho}{Q_0^*+\rho}$ かつ $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$ のとき：

この場合，$P_2(N_2^*,Q_0^*,x^*,y^*)<P_1(N_1^*,Q_0^*)$ であり，小売業が数量割引を利用しないよう (x,y) を設定すればよい．これには，$(x,y)\in\Omega_1\setminus\Omega_2$ でありさえすればよい．

iii) $a_s\le(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}$ または，$\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{(a_b+a_s)\lambda}{\lambda(p_s-c_s)+\beta}$ かつ $a_s=(p_s-c_s)\frac{a_b\lambda}{\beta}+[\lambda(p_s-c_s)+\beta]x^*Q_0^*\frac{1}{\lambda}\ln\frac{Q_U+\rho}{Q_0^*+\rho}$ のとき：

この場合，$P_2(N_2^*,Q_0^*,x^*,y^*)=P_1(N_1^*,Q_0^*)$ であり，小売業が数量割引を利用すること，これを利用しないこととは無差別である．

(2) $\rho\ln\frac{Q_U+\rho}{\rho}-Q_U<-\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合：

この場合，$P_2(N_2^*,Q_0^*,x,y)$ は x と独立であり，これを最大にする y は $y^*\to+0$ である．また，$N_1^*=N_2^*$ (≥ 1) のときは $P_2(N_2^*,Q_0^*,x^*,y^*)=P_1(N_1^*,Q_0^*)$ が成立し，小売業が数量割引を利用することと利用しないこととが無差別である．

参考文献

[1] M. Parlar and Q. Wang, A Game Theoretical Analysis of the Quantity Discount Problem with Perfect and Incomplete Information about the Buyer's Cost Structure. *RAIRO/Operations Research*, **29**, No. 4, (1995), 415-439.

[2] 川勝，三道，濱田，小売業における特別展示商品に対する最適発注量：単位時間当り総利益の最大化，日本応用数理学会論文誌，**10**，No.2，(2000)，175-186.

[3] 川勝，三道，濱田，小売業における特別展示商品に対する最適発注量：鏡及び上げ底の効果，日本応用数理学会論文誌，**12**，No.2，(2002)，135-154.

[4] M. J. Osborne and A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts, (1994).