観測数及び銘柄数に依存したVaRの推定誤差に関する実証分析

電気通信大学 ＊佐々木 豊史 SASAKI Toyofumi
01605930 電気通信大学 宮崎 浩一 MIYAZAKI Koichi
02402180 電気通信大学 野村 哲史 NOMURA Satoshi

1 概要

バリュー･アット･リスク(VaR) とは「所与の信頼水準と期間において，過去の市場の動きから想定される損失を測定する」ものである．通常VaRによって損失を測定するが，その際VaRの推定誤差についてはあまり検討されていない．

本研究では，日本株式市場における個別銘柄のリターン，業種別リターン，TOPIXリターンに関するVaRの推定誤差を，推定に利用する時系列データの標本数及びVaRの信頼水準に着目して検討する．その結果，TOPIXに関するVaRの推定誤差は，業種別のものよりも小さく，また，業種別のVaRの推定誤差は個別銘柄のものよりも小さかった．そこで，この要因を探るために，個別銘柄のリターンが正規分布に従っていなくても，銘柄数の多いポートフォリオである業種別のリターンであれば正規分布に近いといえるかどうか考察する．

2 VaRの推定誤差に関する分析

リターンに正規分布を仮定した$VaR_{c,N}$は信頼水準c%に応じた定数α_cと，観測数Nから推定された標本標準偏差$\hat{\sigma}_N$との積で表すことができる．つまり

$$VaR_{c,N} = -\alpha_c \hat{\sigma}_N \qquad (1)$$

である．$VaR_{c,N}$の標本数による誤差は$\hat{\sigma}_N$の推定誤差に依存するため，標本標準偏差の標準偏差（文献[1]）に基づいて考えればよい．よって，

$$se(VaR_{c,N}) = \alpha_c \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{2N}} \qquad (2)$$

となる．ここで，σは株価リターンの母標準偏差である．

$VaR_{c,N}$の推定誤差の考え方

N個のリターンデータからなるデータセットをnセット考える．各データセットj，$(j=1,\cdots,n)$に対して，$VaR^j_{c,N}$を求める．$VaR^j_{c,N}$は，データセットjに正規分布を仮定した場合の下側$(1-c)$%の値を示す．これより，データセットjの各リターンデータを小さい順に並べたものを

$$\mathbf{R}^j = \left(R^j_{(1)},\cdots,R^j_{(p)},R^j_{(p+1)},\cdots,R^j_{(N)}\right)$$

とし，

$p = N\cdot(1-c)/100$とするとき，$VaR^j_{c,N}$が$R^j_{(p)}$と$R^j_{(p+1)}$の間に入らない割合$\left(\#of\ j, j\in n \middle| VaR^j_{c,N} > R^j_{(p+1)} \cup VaR^j_{c,N} < R^j_{(p)}\right)\times 100/n$を$VaR_{c,N}$の推定誤差と捉える．$VaR_{c,N}$自体の分布は正規分布に従うので，標準偏差は式(2)に示した通りである．つまり，

$$VaR^j_{c,N} \pm se\left(VaR_{c,N}\right) \qquad (3)$$

の内点の何れかが，$R^j_{(p)}$と$R^j_{(p+1)}$の間に入る割合$\left(\#of\ j, j\in n \middle| R^j_{(p)} \le VaR^j_{c,N} \le R^j_{(p+1)}\right)\times 100/n$が約84%となる．ところが，実際の個別銘柄のリターン$\mathbf{R}^j$は正規分布に従わないことが多く，標本数による誤差に加えて，分布形による誤差も考えられる．そのため，実際の$VaR^j_{c,N}$の推定誤差は式(2)で与えられるものとは異なり，通常，式(2)より大きくなる．

本研究では，$VaR^j_{c,N}$が$R^j_{(p)}$と$R^j_{(p+1)}$の間に入る割合が約84%となるためには，推定誤差として$se(VaR^j_{c,N})$の何倍を見込めばよいか検証する．この倍数を乗数ファクター$K^j_{c,N}(84)$と表す．同様にその割合が約97%となるための倍数を$K^j_{c,N}(97)$とする．これらの乗数ファクターを用いて，実際の分布が正規分布からどの程度乖離しているかを把握するための指標d_1，d_2をそれぞれ式(4),(5)で定義する．

$$d_1 = \left\{K^j_{c,N}(84)-1\right\}\cdot se(VaR^j_{c,N}) \qquad (4)$$

$$d_2 = \left\{K^j_{c,N}(97)-2\right\}\cdot se(VaR^j_{c,N}) \qquad (5)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3 ポートフォリオの銘柄数と中心極限定理

個別銘柄のリターン分布が正規分布でないことは知られているが，ここでは銘柄数の多いポートフォリオリターンならば正規分布に近いかどうかを考察する．そこで業種別リターンを用いて算出したd_1，d_2と業種に属する銘柄数に関して回帰分析を行う．

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \qquad (6)$$

ここでyはd_1，もしくはd_2を表し，xはそれぞれの業種に属する対数銘柄数を表している．中心極限定理によれば，ポートフォリオの銘柄数が増えれば，そのリターンは正規分布に近づくのであるから，業種に属する銘柄数が多いほど，すなわち，xが大きいほど正規分布への近さを表すyは小さくなる．つまり傾きβは負の値を示すこととなる．

4 分析に用いるデータ

$VaR^j_{c,N}$の測定は，観測数Nとして100, 500, 1000 営業日の 3 通り，信頼水準cとして90%〜99%を 1%刻みの 10 通り，合計 30 通りに関して行なう．$VaR^j_{c,N}$の測定対象は東証一部上場企業に属する 1339 の個別銘柄と，これらの個別銘柄が属する 33 業種，及びTOPIXである．データ期間は1998年1月6日から2002年12月31日までの日々の株価の終値を利用している．

5 分析結果と考察

観測数Nを 100，測定対象を TOPIX とした$VaR^j_{c,100}$の理論誤差と実現誤差を図 1 に示した．信頼水準 95%以下では理論誤差と実現誤差は概ね一致している．紙面の都合上掲載できないが，本研究において多くの業種に関して99%から90%になるにつれて実現誤差が小さくなることは確認済みである．また，観測数の増加に伴い，どの信頼水準においても誤差が小さくなる傾向にあることも実証した．

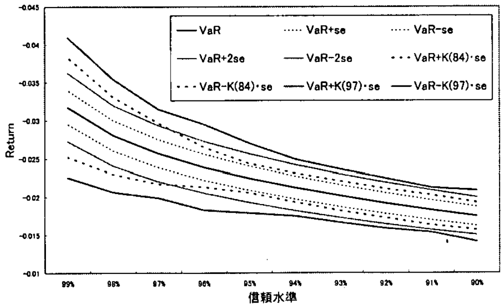

図 1： $VaR_{c,100}$の理論誤差と実現誤差

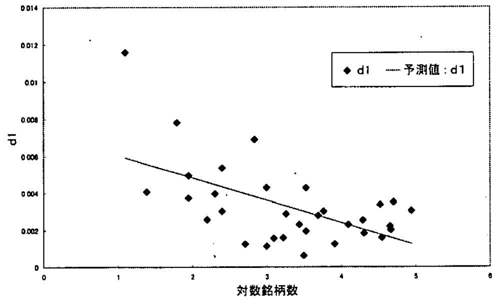

図 2：回帰分析結果（$N=100, c=97\%$）

図2は観測数Nを100,信頼水準cを97%として求めた各業種のd_1を被説明変数yとし,その業種に属する銘柄数の対数$\log N$を説明変数xとして式(6)に基づき回帰分析した結果である．3 章で指摘したとおり，回帰直線の傾きは負となり，銘柄数が多ければ多いほどリターンの分布は正規分布に近いといえる．他の観測数や信頼水準に関しても検討したが，概ね同様の結果が得られた．

6 まとめ

本研究では$VaR_{c,N}$の推定誤差について検討した．その結果，正規分布を仮定した個別銘柄の$VaR_{c,N}$の推定誤差は無視できるほど小さいものではなかったが，銘柄数の多いポートフォリオならば概ね正規分布の理論誤差に収まることがわかった．$VaR_{c,N}$を利用するときは誤差の範囲も考慮すべきである．

参考文献

[1] フィリップ·ジョリオン，「新版 バリュー·アット·リスクのすべて」，シグマベイスキャピタル，(2003)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．