日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

# Stochastic Analysis of Number of Corporations in a Market Derived from Strategic Policies of Individual Corporations for Market Entry and Retreat

01204710 筑波大学 住田潮　SUMITA Ushio
02005520 筑波大学 伊勢恒寿 *ISE Tsunehisa
ウィスコンシン大学 米沢宏一 Koichi Yonezawa

## 0　序論

本研究では市場の状態が企業の数によって表現できると仮定し、その上で個々の企業行動を定式化することで市場の誕生から衰退までのライフサイクルを表現した。具体的にはまず、個々の企業行動を時間的に一様でないマージナル過程として定式化した。これを2変数確率母関数を用いて集計し、$t$時点で市場に存在する企業と、それまでに退出してしまった企業の結合分布を求めた。

## 1　モデル

ここでは、次のような3つの状態を考え、一度退出してしまった企業は再び市場に参入できないと仮定する。

$$\begin{cases} 0 & \text{当該企業はまだ市場に参入していない。} \\ 1 & \text{当該企業は市場に参入している。} \\ 2 & \text{当該企業は市場から退出してしまった。} \end{cases}$$

$\mathcal{N}=\{1,\cdots,N\}$ を全企業の集合とし、時間的に一様でないマージナル過程 $\{N_i(t):t=0,1,2,\cdots\}$ を用いて $t$ 時点における企業 $i$ の状態を表現する。そして確率過程 $\{X(t):t=0,1,2,\cdots\}$ および $\{Y(t):t=0,1,2,\cdots\}$ を次のように定義する。

$$X(t)=\sum_{i\in\mathcal{N}}\delta_{\{N_i(t)=1\}};\ Y(t)=\sum_{i\in\mathcal{N}}\delta_{\{N_i(t)=2\}}.$$

すると、$\{(X(t),Y(t)):t=0,1,2,\cdots\}$ に対応する状態空間は

$$\mathcal{S}_M=\{(x,y):0\leq x+y\leq N,\ x,y\in\{0\}\cup\mathcal{N}\}.$$

となり、対応する状態確率および2変数確率母関数はそれぞれ、

$$\underline{\underline{m}}(t)=[m(x,y,t)]_{(x,y)\in\mathcal{S}_M};$$

$$m(x,y,t)=P[X(t)=x,Y(t)=y];$$

$$\psi(u,v,t)=\sum_{(x,y)\in\mathcal{S}_M}m(x,y,t)u^xv^y.$$

となる。

企業 $i$ を除いた市場に対しても同様に $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $\mathcal{S}_{M\setminus\{i\}}$, $\underline{\underline{m}}_i(t)$, $m_i(x,y,t)$, $\psi_i(u,v,t)$ を導入することができる。今、$\underline{p}_i^T(t)$ を $\{N_i(t):t=0,1,\cdots\}$ の状態確率ベクトルとすると、これは、

$$\underline{p}_i^T(t)=[p_{i0}(t),p_{i1}(t),p_{i2}(t)];$$

$$p_{ij}(t)=P[N_i(t)=j],0\leq j\leq 2.$$

と書くことができ、対応する2変数確率母関数は以下のように定義される。

$$\varphi_i(u,v,t)=p_{i0}(t)+p_{i1}(t)u+p_{i2}(t)v.$$

いま、$\{N_i(t):t=0,1,2,\cdots\}$ は $t$ 時点における推移確率行列 $\underline{\underline{a}}_i(t)$ によって決まる時間的に一様でないマージナル過程であると仮定する。0時点では企業は全く市場に参入していないと仮定すると、すべての $j\in\mathcal{N}$ に対して

$$\underline{p}_j^T(0)=[1,0,0];$$

$$m_j(x,y,0)=\delta_{\{x=y=0\}}\ \text{for}\ (x,y)\in\mathcal{S}_{M\setminus\{j\}}.$$

が成り立つ。すべての $j\in\mathcal{N}$ に対して $\underline{p}_j^T(t)$ および $\underline{\underline{m}}_j(t)$ が既知であるとすると、$\underline{\underline{a}}_i(t)$ は

$$\begin{aligned}\underline{\underline{a}}_i(t) &= \begin{bmatrix}1-\alpha_i(t) & \alpha_i(t) & 0\\ 0 & \beta_i(t) & 1-\beta_i(t)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \textit{where}\ \alpha_i(t) &= \sum_{(x,y)\in\mathcal{S}_{M\setminus\{i\}}}m_i(x,y,t)p_i(t|x,y);\\ \beta_i(t) &= \sum_{(x,y)\in\mathcal{S}_{M\setminus\{i\}}}m_i(x-1,y,t)q_i(t|x,y);\end{aligned}$$

$p_i(t|x,y)$
$= P[N_i(t+1)=1|N_i(t)=0, X(t)=x, Y(t)=y];$
$q_i(t|x,y)$
$= P[N_i(t+1)=1|N_i(t)=1, X(t)=x, Y(t)=y]$

となる。$\underline{\underline{a}}_i(t)$ を用いると、$\underline{p}_i^T(t+1)$ は

$$\underline{p}_i^T(t+1) = \underline{p}_i^T(t)\underline{\underline{a}}_i(t)$$

となり、さらに $\underline{\underline{P}}_i(t) = \prod_{k=0}^{t} \underline{\underline{a}}_i(t)$ を用いると、

$$\underline{p}_i^T(t+1) = \underline{p}_i^T(0)\underline{\underline{P}}_i(t)$$

となる。こうして、$\underline{p}_i^T(t+1)$, $\varphi_i(u,v,t+1)$, $\psi_i(u,v,t+1)$ を求めることができる。

## 2 市場参入・退出のスペクトル分析

いま、$0 \le \alpha, \beta \le 1$ に対して、

$$f(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}; \quad g(\alpha,\beta) = \frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}$$

と定義し、次のようにして $\underline{\underline{J}}_1$、$\underline{\underline{J}}_2(\alpha,\beta)$ および $\underline{\underline{J}}_3(\alpha,\beta)$ を導入する。

$$\underline{\underline{J}}_1 = \underline{u}_1\underline{v}_1^T,\ \underline{\underline{J}}_2(\alpha,\beta) = \underline{u}_2(\alpha,\beta)\underline{v}_2^T,$$
$$\underline{\underline{J}}_3(\alpha,\beta) = \underline{u}_3\underline{v}_3^T(\alpha,\beta);$$
$$where\ \underline{u}_1^T = [1\ 1\ 1],\ \underline{v}_1^T = [0\ 0\ 1];$$
$$\underline{u}_2^T(\alpha,\beta) = [f(\alpha,\beta)\ 1\ 0],\ \underline{v}_2^T = [0\ 1\ -1];$$
$$\underline{u}_3^T = [1\ 0\ 0],\ \underline{v}_3^T = [1\ -f(\alpha,\beta)\ g(\alpha,\beta)].$$

このとき次の定理が成り立つ。

**Theorem 2.1**

$$\begin{aligned}\underline{\underline{P}}_i(t) &= \underline{\underline{J}}_1 + \prod_{k=0}^{t}\beta_i(k)\underline{\underline{J}}_2\big(\alpha_i(0),\beta_i(0)\big) \\ &\quad + \prod_{k=0}^{t}\{1-\alpha_i(k)\}\underline{\underline{J}}_3\big(\alpha_i(t),\beta_i(t)\big) \\ &\quad + C(t)\underline{u}_3\underline{v}_2^T\end{aligned}$$

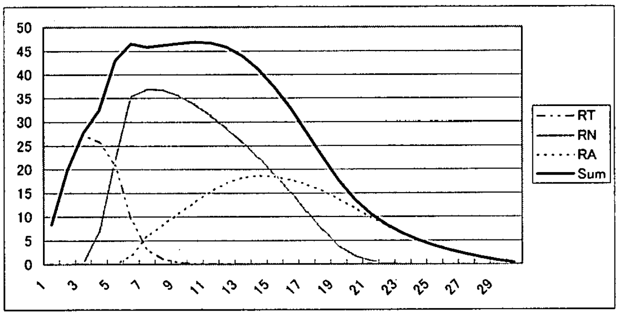
ここで、

$$\begin{aligned}C(t) &= \beta_i(t)C(t-1) + \prod_{k=0}^{t-1}\{1-\alpha_i(k)\}\beta_i(t) \\ &\quad \times\{f\big(\alpha_i(t),\beta_i(t)\big) - f\big(\alpha_i(t-1),\beta_i(t-1)\big)\}.\end{aligned}$$

$t = 1, 2, \cdots$, $C(0) = 0$ であるとする。

## 3 数値計算

ここでは数値実験のため $N$ 企業を3つの集合、すなわち、RT(Risk-Taking) 企業の集合、RN(Risk-Neutral) 企業の集合、そして RA(Risk-Aversive) 企業の集合に分割する。簡略化のため同じ企業集合に属する企業はすべて共通の戦略を持っているものとし、それは $p_i(t|x,y)$ および $q_i(t|x,y)$ に反映されているものとする。このとき、$x$ と $y$ のみに依存するモデルを考え、市場に参入している企業数の期待値 $E[X(t)]$ のグラフを描いた。




(RT,RN,RA)=(30,40,30) のときの $E[X(t)]$ のグラフ
縦軸：企業数　横軸：時間

グラフからライフサイクルにおける導入期、成長期、安定期、衰退期の4つの周期における RT、RN、RA の特徴を見ることができる。RT は導入期に市場に参入することで市場形成の引き金となり、RN や RA が市場に参入するきっかけを作る。RN は成長期及び安定期に市場を安定させるという重要な役割を果たすが、一方で市場衰退の要因を生み出す。RA も RN と同様に安定期に市場を安定させるが、市場がある一定の規模に達しないと参入しない。

## 4 結論

各企業は単独で戦略を決定しているわけだが、それらが合わさったとき、市場全体の挙動はそれぞれの挙動の単純な総和ではなく、それらの相互作用の中から導き出されるのである。各企業集合がそれぞれの役割を果たすことで、市場全体のライフサイクルが形成されるのである。