日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

学習型逐次バッチサイズ決定問題の最適政策について

01503164　兵庫県立大学 経営学部　　濱田年男　HAMADA Toshio

1　緒言

バッチ加工が可能な単一機械で同一製品を n 個生産する場合を考える．バッチ内の最初のジョブの加工を開始する前に，準備時間が必要であるとする．製品の加工時間は一定であるが，準備時間は確率変数であり，その分布のパラメータは未知で，共役事前分布を持つものとする．バッチ内のジョブの完了時刻は，そのバッチ内の最後に加工されるジョブの完了時刻と同一であるとする．意思決定者はバッチ内のジョブの個数を決定し，加工を行って準備時間を観測し，事前分布を更新して，次のバッチサイズを決定する．全てのジョブを加工し終えるまでこの過程を繰り返す．目的は n 個のジョブの完了時刻の和を最小にすることである．

準備時間が一定値をとる場合の研究は，一般的なバッチスケジューリング問題として，主に1980年中ごろから，多くの研究がなされてきている(例えばPotts and Kovalyov [2] を参照)．また加工時間が既知の分布の確率的問題も Koole and Righter [1] においてなされているが，これらは静的な問題である．

パラメータが未知の分布を含む問題は，観察値を得た後にパラメータの事前分布を更新した後に次の決定を行うような動的な問題である．準備時間がパラメータ u の指数分布に従い，u の値は未知で，密度関数が

$$f(x \mid w,\alpha)=\begin{cases}\Gamma(\alpha)^{-1}w^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-wx}, & if \quad x\ge 0,\\ 0, & if \quad x<0,\end{cases}$$

のガンマ分布を事前分布として持つ場合は，柳井[3] において，動的計画法で定式化し，再帰方程式をジョブ数が4まで逐次解いているが，それ以上については，場合分けの複雑さのために行われなかった．

本研究ではこの問題に対して，再帰方程式の構造から得られる諸性質を用いて，問題の持つ特性を明らかにすることにより，一般の自然数 n に対しても成立する最適戦略の構造を明らかにした．

2　再帰方程式と諸性質

現在の事前分布のパラメータが (w,α) であり，残りのジョブ数が n である時の状態を $(n;w,\alpha)$ で表す．柳井 [3] の再帰方程式は以下のようなものである．$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$F_n(w,\alpha)=\min_{1\le k\le n}F_n^k(w,\alpha)$$

が成立する．ここに $F_0(w,\alpha)=0$ であり，$1\le k\le n$ に対して

$$F_n^k(w,\alpha)=nw(\alpha-1)^{-1}+nk$$
$$+\int_0^{\infty}F_{n-k}(w+x,\alpha+1)\frac{w^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-wx}dx$$

である．ここに $F_n(w,\alpha)$ は状態を $(n;w,\alpha)$ である時に，最適政策を用いたときの最小期待総完了時刻であり，また $F_n^k(w,\alpha)$ は状態を $(n;w,\alpha)$ である時に，まず k 個のジョブを1つのバッチとして処理し，以後は最適政策を用いたときの最小期待総完了時刻である．この $F_n(w,\alpha)$ については，$1\le n\le 4$ に対して再帰方程式を順次解くことにより既に得られている．

本研究では再帰方程式を直接解かずに，$F_n^k(w,\alpha)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ および $F_n(w,\alpha)$ の持つ諸性質を明らかにすることにより，一般の n に対する最適解の持つ構造を明らかにする．以下においては条件付期待値 $E[f(X)|\,w,\alpha]$ は次の式で定義されるものとする．

$$E[f(X)|\,w,\alpha]=\int_0^{\infty}f(x)\frac{w^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-wx}dx$$

以下の諸性質が成立する．

補題 1　$f(X)$ が連続で狭義単調増加ならば，$E[f(X)|\,w,\alpha]$ も連続で，w について狭義単調増加，α について狭義単調減少である．

補題 2　$n\ge 2$，$2\le k\le n$，$1\le m\le k-1$，$w>0$，$\alpha>1$ に対して，

$$F_n^k(w,\alpha)-F_{n-m}^{k-m}(w,\alpha) = mw(\alpha-1)^{-1}+m(n+k-m)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が成立する．

系 1 $n \geq 2$，$1 \leq k \leq n$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，

$$F_n^k(w,\alpha) - F_{n-1}^{k-1}(w,\alpha) = w(\alpha-1)^{-1} + n + k - 1$$

即ち

$$F_n^k(w,\alpha) = F_{n-1}^{k-1}(w,\alpha) + w(\alpha-1)^{-1} + n + k - 1$$

が成立する．

補題 3 $n \geq 3$，$2 \leq k \leq n-1$，$1 \leq m \leq k-1$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，

$$\begin{aligned} & F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha) \\ &= F_{n-m}^{k-m}(w,\alpha) - F_{n-m}^{k-m+1}(w,\alpha) - m \end{aligned}$$

が成立する．

系 2 $n \geq 2$，$1 \leq k \leq n$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，

$$\begin{aligned} & F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha) \\ &= F_{n-1}^{k-1}(w,\alpha) - F_{n-1}^{k}(w,\alpha) - 1 \end{aligned}$$

が成立する．

補題 4 $n \geq 2$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，

$$\begin{aligned} & F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha) \\ &= -n + E\,[F_{n-1}(w+X,\alpha+1) \\ &\quad -F_{n-2}(w+X,\alpha+1)\; w,\alpha] \end{aligned}$$

が成立する．

補題 5 $n \geq 2$，$1 \leq m \leq n-1$，$1 \leq k \leq n-1$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，$F_m(w,\alpha) - F_{m-1}(w,\alpha)$ が w について狭義単調増加ならば，$F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha)$ も連続で，w について狭義単調増加，α について狭義単調減少である．

補題 6 $n \geq 2$，$1 \leq k \leq n-1$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，

$$\begin{aligned} w(\alpha-1)^{-1} - k &\leq F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha) \\ &\leq (n-k)w(\alpha-1)^{-1} - k \end{aligned}$$

3 最適政策

前節の補題等で得られた種々の性質を用いて，次の定理を導くことができる．

定理 1 $n \geq 2$，$1 \leq k \leq n-1$，$w > 0$，$\alpha > 1$ に対して，$F_n^k(w,\alpha) - F_n^{k+1}(w,\alpha) = 0$ は唯一の解を持つ．これを $r_{n,k}(\alpha)$ とすると，$r_{n,k}(\alpha) < r_{n-1,k}(\alpha)$ であり，また $r_{n,1}(\alpha) < r_{n,2}(\alpha) < \cdots < r_{n,n-1}(\alpha)$ が成立する．

これにより，状態 $(n; w, \alpha)$ における最適政策は以下のように与えられる．

ステップ 1. n の値に応じて，次の (i) または (ii) のいずれかを行う．

(i) $n = 1$ のとき，バッチサイズ 1 として加工を行い $n \leftarrow 0$ とする．

(ii) $n \geq 2$ のとき，もし $0 < w < r_{n,1}(\alpha)$ ならばバッチサイズ 1 として加工を行い，準備時間 $X = x$ を観測し，$n \leftarrow n-1$ とする．また，$2 \leq k \leq n-1$ に対して，もし $r_{n,k-1}(\alpha) \leq w < r_{n,k}(\alpha)$ ならばバッチサイズ k として加工を行い，準備時間 $X = x$ を観測し，$n \leftarrow n-k$ とする．さらにまた，$r_{n,n-1}(\alpha) \leq w$ ならばバッチサイズ n として加工を行い，$n \leftarrow 0$ とする．

ステップ 2. $n = 0$ ならば終了する．さもなければステップ 3 へ進む．

ステップ 3. $w \leftarrow w + x$，$\alpha \leftarrow \alpha + s$ としてステップ 1 に戻る．

謝辞 本研究は日本学術振興会の科学研究費補助金 (C)(2) 15510136 により行われたものである．

参考文献

[1] Koole, G. and Righter, R. (2001) A stochastic batching and scheduling problem. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **15**, 465-479.

[2] Potts, C. N. and Kovalyov, M. Y. (2000) Scheduling with batching: a review. *European Journal of Operational research* **120**, 228-249.

[3] 柳井 (2001) 学習を考慮した最適バッチスケジューリング. 星陵大論集 **33**, 331-341.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．