2–C–5

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

符号対称行列のSylvester指数

申請中　東京大学　*垣村 尚徳　KAKIMURA Naonori
01012384　東京大学　岩田 覚　IWATA Satoru

1 はじめに

社会現象を線形方程式で定式化する時，選好順序や係数の正負などの大小関係は容易に知ることができるが，係数の数値化が困難である場合が多い．このような定性的情報のみ与えられている状況で解析を行うためには，係数行列が要素の絶対値によらず正則 (符号正則性) かどうかを知る必要が生じる [2, 4]．この符号正則性を判定する問題の計算複雑度は長い間未解決であったが，1999 年に Robertson, Seymour and Thomas によって多項式時間解法が示された [3]．本研究では，この結果を用いて，符号対称行列の Sylvester 符号指数を決定する多項式時間アルゴリズムを提案する．

n 次対称行列 A に対し，正の固有値の数，負の固有値の数，ゼロの固有値の数を Sylvester 符号指数と呼び，各々$r_+(A)$,$r_-(A)$,$r_0(A)$ とおく．符号指数は合同変換によって不変な値である（Sylvester の慣性則）．つまり対称行列 A を適当な正則行列 S によって，

$$S^\top AS = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0),$$

という対角行列に変換したときの 1,−1,0 の個数がそれぞれ符号指数に対応する．

結論として，項別正則な符号対称行列に対しては，対称行列が符号正則であるとき，かつそのときに限り，Sylvester 符号指数を行列要素の符号情報のみから効率的に求められる．一方，項別正則ではない符号対称行列に対しては，符号指数を決定できない事を判定する問題は NP 完全である．

2 行列と二部グラフ

行列の正則性の組合せ的な概念として，項別正則を定義する．行列 A の行列式の展開項で非零なものが存在する時，A は項別正則であると言う．正則な行列は項別正則である．

また，行列 A が符号正則であるとは，$\det A$ を展開したときの各項が全て同符号であることを言う．このとき，A と同じ符号を持つ行列は要素の絶対値によらず全て正則であるといえる．

n 次正方行列 A で表現される二部グラフ $G(U, V; E)$ を，頂点集合 $U := \{u_1, \ldots, u_n\}$,$V := \{v_1, \ldots, v_n\}$，枝集合 $E := \{(u_i, v_j) \mid a_{ij} \neq 0, u_i \in U, v_j \in V\}$ と定める．枝は A の非零要素を表す．

各頂点に高々一つの枝が接続している枝集合をマッチング，そして全ての頂点に接続している時を完全マッチングという．正方行列 A に対し，$G(A)$ が完全マッチングを持つ時，かつその時に限り A が項別正則である．

$G(A)$ の枝 (u_i, v_j) を $a_{ij} > 0$ ならば u_i から v_j へ，$a_{uv} < 0$ ならば逆に向き付けを行った有向二部グラフ $D(A)$ が Pfaffian という性質を満たす時，かつその時に限り A は符号正則である．Robertson, Seymour and Thomas は，無向二部グラフが Pfaffian となる向き付けを持つか判定する多項式時間アルゴリズムを与えた [3]．このアルゴリズムは有向二部グラフが Pfaffian か判定する問題に簡単に拡張可能である [5]．

3 対称行列のグラフ構造

まず準備として，項別正則な対称行列 A に対応する二部グラフ $G(A) := G(U, V; E)$ の構造を調べる．項別正則性から $G(A)$ は完全マッチング M を持つ．枝集合 $X \subseteq E$ に対し，X の転置 $X^\top := \{(u_j, v_i) \mid (u_i, v_j) \in X\}$ を定義する．すると対称性より完全マッチング M の転置 $M^\top$ は完全マッチングであり，サーキット $C \subseteq E$ の転置 $C^\top$ はサーキットである．$C^\top$ と C が等しい時対称なサーキットと呼ぶ．両端点がサーキット C 上にあり C に含まれない枝を C の弦と呼ぶ．この時次の定理が成り立つ．

定理 1 項別正則な対称行列 A に対し，$G(A)$ は以下のいずれかの条件を満たす．M は $G(A)$ の完全マッチングとする．

(1). $\exists a_{ii} \neq 0$ s.t. $\exists M$,$(u_i, v_i) \in M$.
(2). $\exists a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ s.t. $\exists M$,$(u_i, v_j), (u_j, v_i) \in M$.
(3). $G(A)$ は弦を持たない対称なサーキットの直和．

略証: $G(A)$ が条件 (3) を満たさないならば，(1) 又は (2) を満たすことを示す．項別正則なので $G(A)$ は完全マッチング M_1 と $M_2 := M_1^\top$ を持つ．M_1 は条件 (1),(2) を満たさないとしてよい．すると $M_1 \cup M_2$ はサーキット $C_k (1 \leq k \leq p)$ の直和集合であり，対称性から $\exists C_k^\top \subseteq M_1 \cup M_2, \forall C_k \subseteq M_1 \cup M_2$ を満たす．C_k が対称ではないならば，$M' := [M_1 \setminus (C_k^\top \cap M_1)] \cup (C_k^\top \cap$

M_2) のようにマッチングを入れ替えると，M' は条件 (2) を満たす．よって $C_k = C_k^\top$．条件 (3) を満たさないという仮定から，$G(A)$ は，(i) $\exists(u_i, v_j) \notin M_1 \cup M_2$, $u_i \in \partial C_k \cap U$, $v_j \in \partial C_l \cap V$，または (ii) $\exists(u_i, v_j) \notin M_1 \cup M_2, u_i \in \partial C_k \cap U, v_j \in \partial C_k \cap V$ を満たす．(i) を満たすならば，$(u_i, v_j), (u_j, v_i), C_l, C_k$ 上を通るサーキットでマッチングを入れ替えると条件 (2) を満たす．(ii) を満たすならば，(u_i, v_j) を通る C_k 上のサーキットでマッチングを入れ替えると条件 (2) を満たす． □

4 符号正則な対称行列の符号指数

補題 1 符号正則な対称行列 A に対し，定理 1 の条件 (1) を満たすならば，(1) を満たす i 行 i 列を除いた行列を A' として，次式を満たす．

$$(r_+(A), r_-(A)) = \begin{cases} (r_+(A') + 1, r_-(A')) & (\text{if } a_{ii} > 0) \\ (r_+(A'), r_-(A') + 1) & (\text{if } a_{ii} < 0). \end{cases}$$

補題 2 符号正則な対称行列 A に対し，定理 1 の条件 (2) を満たすならば，(2) を満たす $\{i, j\}$ 行 $\{i, j\}$ 列を除いた行列を A' として，次式を満たす．

$$(r_+(A), r_-(A)) = (r_+(A') + 1, r_-(A') + 1).$$

補題 3 符号正則な対称行列 A に対し，$G(A)$ が弦を持たない対称なサーキットならば，n は奇数であり，$r = (n-1)/2$ とすると符号指数は次式を満たす．

$$(r_+(A), r_-(A)) = \begin{cases} (r+1, r) & (\text{if } \operatorname{sgn}\det A = (-1)^r) \\ (r, r+1) & (\text{if } \operatorname{sgn}\det A \neq (-1)^r). \end{cases}$$

以上の補題から，A が符号正則ならば，定理 1 より符号指数を求めることができる．一方，もし符号正則でないならば行列式で異なる符号の展開項が存在し，その値を変化させることで符号指数は変化しうる．よって符号指数を決定できない．

定理 2 項別正則な対称行列に対し，もし符号正則ならば，かつそのときに限り，符号指数が行列要素の符号のみから決定可能である．

5 アルゴリズム

与えられた n 次対称行列 A が符号正則かどうかの判定は，[3] のアルゴリズムを用いて $\mathrm{O}(n^3)$ で可能である．

対称行列 A が符号正則とする．この時，まず対角成分に対応する枝の本数を最大にする完全マッチング M_d を求めると計算量は $\mathrm{O}(nm)$ である．M_d 上の対角成分については補題 1 より符号指数が定まる．さらに，定理 1 の略証と同様に $M_d \cup M_d^\top$ 上のサーキットを見つけ完全マッチングを更新していくことで，補題 2，3 より符号指数を求められる．サーキットの探索一回は高々 $\mathrm{O}(m)$ の計算量であり，一度の更新で少なくとも 2 行 2 列減らせるので反復回数は高々 $\mathrm{O}(n)$ 回である．

定理 3 符号正則な n 次対称行列に対し，符号指数は，行列要素の符号情報のみからの $\mathrm{O}(nm)$ の計算量で求められる (m は行列の非零要素の数)．

6 一般の対称行列の符号指数

対称行列 A が項別正則ではないとする．もし A が符号正則である主小行列 A'(大きさ $\mathrm{rank}A$) を持つならば，$r_0(A) = n - \mathrm{rank}A$ であり，残りの指数は 4 節と同様の議論より求まる．よって A' が存在するかどうか判定する問題の複雑性を考える．一方，以下の定理が Klee, Ladner and Manber によって証明されている [1]．この結果を元に，次の定理 5 が成り立つ．

定理 4 (Klee, Ladner and Manber[1])
$n \times (n + \lceil n^{1/k} \rceil)$ 行列 ($k \in \mathbb{N}$) が行フルランクではない事を符号のみから判定する問題は，NP 完全である．

定理 5 項別正則ではない対称行列に対し，符号指数を行列要素の符号のみから決定できないことを判定する問題は，NP 完全である．

参考文献

[1] V. Klee, R. Ladner, and R. Manber: Sign-solvability revisited, *Linear Algebra Appl.*, 59, pp131–158, 1984.

[2] K. Lancaster: The scope of qualitative economics, *Review of Economic Studies*, 29, pp99–132, 1962.

[3] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas: Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Ann. Math.*, (2) 150, no. 3, pp929–975, 1999.

[4] P. A. Samuelson: *Foundations of Economics Analysis*, Harvard U.P., 1947; Atheneum, New York, 1971.

[5] V. V. Vazirani, M. Yannakakis: Pfaffian orientations, 0-1 permanents, and even cycles in directed graphs, *Discrete Appl. Math.*, 25, pp179–190, 1989.