日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

数理計画法を用いた双対尺度法

01001600 成蹊大学 ＊上田 徹 UEDA Tohru

1．まえがき

継次カテゴリデータ（反応カテゴリに順位のあるもの）に対する模型行列の作成[1]は継次性を表現するために直感的理解が難しく、その作成が容易でない。しかし、継次性は数理計画法の制約として捉えればその表現は容易であるのでまず数理計画法としての定式化について述べる。

ところで、回答者に評価対象を主観的に評価してもらう場合はその評価結果は確定値ではなくこの程度といった曖昧さを持っているであろう。もちろん数値で答えることもそう容易ではないが、いくつか言葉で表現されたカテゴリから選ぶ場合にもどちらを選ぼうか迷った結果の、選択かも知れない。そのような場合に、回答の中に自信のなさを告げてもらう（たとえば区間で答えてもらうとか、隣り合うカテゴリに重みを付けさせる）ことが考えられるが、詳しく述べてもらえばもらうほど曖昧さを含んでいる項目が分岐して増えてしまうであろう。そこで詳しい回答を求めるのではなく分析側で対処することを考える。先にコンジョイント分析法ではファジィ数を取り込むことによりその目的がほぼ実現できることを示した[2]。ここでは双対尺度法について曖昧さをモデルに持ち込むためにファジィ数を用いることを提案する。

2．扱うデータと,対応する双対尺度法[1]

N人の回答者の各々がM個の対象を評価する。ただし、評価値はK個のカテゴリの一つを選ぶこととし、番号の大きいカテゴリほどよい評価値とする。カテゴリkとカテゴリ$(k+1)$の境界に与える値をτ_kとすると、$\tau_k \leq \tau_{k+1}$を満たしてほしい。またn番目の対象に与える値をμ_nとすると、M個のμ_nの値は回答を反映していてほしい。そこで西里は特別なデータ行列$F=(f_{ij})$の作り方を提案している。FはN行$\{M(K-1)\}$列で、その各行は対象ごとに$(K-1)$個の要素を与えられ、カテゴリkに属すると答えられた場合には$(k-1)$以下のカテゴリの値は(-1)とし、k以上のカテゴリの値は1とする。ただし、$(K-1)$個の要素がすべて(-1)のときにはカテゴリKであったものとする。これにより、

$$
\begin{aligned}
f_{i,j(K-1)+h} = & 1: 人 i は \mu_j < \tau_h と評価 \\
& 0: 人 i は \mu_j > \tau_h と評価
\end{aligned}
$$

と考える。模型行列Aは$\{M(K-1)\}$行$\{M+(K-1)\}$列であり、

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
I_m & -\mathbf{1}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m \\
I_m & \mathbf{0}_m & -\mathbf{1}_m & \cdots & \mathbf{0}_m \\
I_m & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
I_m & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & -\mathbf{1}_m
\end{bmatrix}
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ M \end{matrix} \\
\begin{matrix} m & m+1 & m+2 & \cdots & m+M \end{matrix}
\end{array}
$$

である（$m=K-1$）。I_mは$m\times m$の単位行列、$-\mathbf{1}_m$, $\mathbf{0}_m$はm個の要素がすべて(-1)，0のベクトルである。

これだけでも結構理解が難しいが、τ_k間の比較、μ_n間の比較結果を反映するために行列F_a, A_aを導入して結局

$$
E = [F, F_a]\begin{bmatrix} A \\ A_a \end{bmatrix}
$$

をつくり、これからτ_k, μ_nおよび回答者の値を求

めている。

3．数理計画法としての定式化

下表のような簡単な例をイメージして説明する。回答者 i に y_i, 対象 j に x_j, 評価値 k(=1:×、2:△、3:○）に t_k を与えることとし，回答者 i の対象 j に与えた評価値を e_{ij} とする。

評価対象 回答者	A	B	C	D	E
1	2	3	3	3	3
2	1	2	3	1	1
3	2	3	2	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1	2	2	1	1

回答者間の分散が最大になるよう、対象間の分散が最大になるよう考えると、以下のような定式化が考えられる。

【定式化１】 $\max \sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2$; μ:全体平均

$$s.t.\quad \sum_{i=1}^{N} y_i / N = \mu = 0 \ ; \quad y_i = \sum_{j=1}^{M} e_{ij} / M$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(e_{ij}-\mu)^2 /(NM) = 1$$

$$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_K$$

ここで、回答者 i が評価値 t_k を与えた対象数を h_{ik} とすると、 $y_i = \sum_{k=1}^{K} h_{ik} t_k / M$ (1)

である。

【定式化２】 $\max \sum_{j=1}^{M}(x_i-\mu)^2$; μ:全体平均

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{M} x_j / M = \mu = 0 \ ; \quad x_j = \sum_{i=1}^{N} e_{ij} / N$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(e_{ij}-\mu)^2 / NM = 1$$

$$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_K$$

4．ファジィ数の利用[2]

回答者を通じて確定的な値 t_k があるのではなく、それはもう少し曖昧なものと考えて、t_k を下限値 $(t_k - c_k)$、モード t_k、上限値 $(t_k + d_k)$ の三角型ファジィ数とする。このとき、その代表通常数は

$$T_k = \{(t_k - c_k) + 2t_k + (t_k + d_k)\}/4 \quad (2)$$

である。定式化1に対応して次のような定式化が考えられる。

【定式化Ｆ１】 $\max \sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2$; μ:全体平均

$$s.t.\quad \sum_{i=1}^{N} y_i / N = \mu = 0 \ ; \quad y_i = \sum_{k=1}^{K} h_{ik} T_k / M$$

$$\sum_{k=1}^{K} H_k T_k^2 /(NM) = 1 \ ; \quad H_k = \sum_{i=1}^{N} h_{ik}$$

$$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_K$$

（または $T_1 \le T_2 \le \cdots \le T_K$ ）

ここで、三角型ファジィ数の自乗は三角型ファジィ数にならないことを考慮して T_k^2 の代りに

$$[\int_0^1 \{t_k - c_k(1-\alpha)\}^2 d\alpha + \int_0^1 \{t_k + d_k(1-\alpha)\}^2 d\alpha]/2$$
$$= t_k^2 - t_k(c_k - d_k)/2 + (c_k^2 + d_k^2)/6$$

を使うことも考えられる。

また、隣り合う t_k の値が等しくなってしまうこともあり、

$$t_k - t_{k-1} \ge \text{一定値}$$

の制約を加えることも必要となる。

[1]西里静彦(1982)：「質的データの数量化」、朝倉
[2]上田徹（1999）：「コンジョイント分析における曖昧な回答の扱い方」、オペレーションズ・リサーチ、No. 9