2-B-8

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

ペロン―フロベニウスの定理を基とした様々なランキング決定法について

01507350 東京都立工業高等専門学校 数学教室 *保福 一郎 HOFUKU Ichiro
東京理科大学 経営学部 大島 邦夫 OSHIMA Kunio

1 はじめに

通常，ランキング決定プロセスは，ランキング対象となる者あるいは物（以下，単に要素と呼ぶ）が複数集まった1つのグループ（構成集合と呼ぶ）内での共通の試技・競技等の結果により決定される．したがって構成集合を A とすれば，共通の試技・競技等を行うことにより，集合 A の各々の要素に対応したランキングが決定されることになる．例えば1クラスに属する学生に対し，ある1つの教科の試験を実施する場合，構成集合 A は，あるクラスに属する学生の集合であり，共通の試技・競技は試験となる．共通の試技・競技等の結果によるランキング決定法にはその特性にあわせた様々な手法が考えられる．先の例で示した共通の試技・競技が試験であれば，もっとも単純なランキングの決定法は，獲得した点数の高い学生から順にランキングを決定していく方法である．このランキングはクラス全体における各学生の状況把握という点では意味があるが，学生のその試験に対する学力の優劣を完全に表しているとは言い難い．なぜなら，試験には様々な難易度をもった設問が混在するため，各学生の設問に対する得点の分布状況を反映させない限りその試験に対する学生の学力を評価することができないからである．著者らはこの問題に対し，各々の学生の各設問に対し獲得した点数の相違から設問の難易度を導出し，Perron-Frobenius の定理を適用した新たな2つのランキング (絶対ランキングと相対ランキング）の決定法を提案した．それぞれのランキングの特徴は以下の通りである．

(1a) 絶対ランキング法
難しい設問に対し獲得した得点が高い学生の方がランキングが上がる．

(1b) 相対ランキング法
1つの設問に対する二者比較により優れた学生の方がランキングが上がる．

(1a) の絶対ランキング法は，強者の絶対的優位性を基にランキング生成者側の意図を直接的に反映させたものであり，点数順に並べた元のランキングに対し大きく影響を与える．それに対し (1b) の相対ランキング法は，設問の難易度に影響されるものではなく，各設問に対し高得点を均一的に獲得した学生の方がランキングが上がる特性をもつ．その点から述べれば相対ランキング法は，学生の平均的力量を表したものとなる．これらの方法により生成されたランキングは，同一の得点を獲得した学生間においても，明確な順位が決定される．

本発表は先のランキング法 (1a)，(1b) を基とし，次の2つの型のランキングを導出する方法を与える．ここで本研究を通じた共通の試技は試験であるとし，構成集合は学生の集合とする．

(i) 統合ランキング
本ランキングは構成集合が1つであり，試技が多数存在する場合を考慮した学生の順位を表す．

(ii) 混合ランキング
本ランキングは，共通の試技が1つであるが構成集合が多数存在する場合の学生全体の順位を表す．

表 1: The relation between students and questions

	$a(4)$	$a(5)$	$a(6)$	Total
$a(1)$	8	7	5	20
$a(2)$	7	6	7	20
$a(3)$	5	6	9	20
Mean	6.7	6.3	7.0	

2 データの適用

本章では (1a)，(1b) のランキングの紹介として，表1のデータを基にそれぞれのランキングを導出する．表1はある数学の試験において，対象学生3名 $\mathcal{A} = \{a(1), a(2), a(3)\}$ の3つの設問 $a(4)$，$a(5)$，$a(6)$

に対し獲得した点数の状況を表す．学生3名は全て同一の得点20点を獲得していることが解る．各設問の平均点に関する相違は差ほどなくやや設問 $a(5)$ が他の設問に対し難易度が高いと判断できる．この状況下で構成集合内でのランキングを決定することは困難である．この問題に対し，2つのランキング法(1a)，(1b)はそれぞれのランキングの特性を生かしつつ明確なランキングを決定することができる．まず表1から絶対ランキング法，相対ランキング法に対応した既約行列 $\mathbf{M}_A = m_A[i,j]$，$\mathbf{M}_R = m_R[i,j]$ をそれぞれ以下の規則に従い生成する．

$$m_A[i,j] = \begin{cases} a(i;j), & (1 \le i \le 3,\ 4 \le j \le 6) \\ 10 - a(j;i), & (4 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 3) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

$$m_R[i,j] = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \dfrac{a(i\ ;\ 3+k)}{a(i\ ;\ 3+k) + a(j\ ;\ 3+k)}, & (1 \le i,j \le 3,\ i \ne j) \\ 0.5, & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

ここで式(1), (2), の $a(i,\ j)$ は，学生 $a(i)$ が設問 $a(j)$ に対し獲得した点数を表す．式(1), (2)を基に生成した行列 $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{M}_R$ からそれぞれのスペクトル半径 λ_A, λ_R に対応した固有ベクトル $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_R$ を求めることができる．以下の式が数値解析により導出されたものである．

$$\begin{cases} \lambda_A &= 14.1193 \\ \lambda_R &= 1.49995 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_A = \{0.476586, 0.469838, 0.465501, \\ \qquad\quad 0.332184, 0.366246, 0.30157\} \\ \boldsymbol{r}_R = \{0.577269, 0.581494, 0.573258\} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)のそれぞれの固有ベクトルをランキングベクトルと呼び，各成分の値がそのままランキングベクトル内での優位性を表す指標となる．次節にて各ランキング法により導出されたランキングの特性を与える．

2.1 各ランキング法の特性

式(3)の $\boldsymbol{r}_A$ は $l_2 - norm$ において正規化されており，第1から第3成分は各学生に対応した力量を表し，第4から第6成分は各設問に対応した難易度を表す．学生の順位に関しては同一得点を獲得した学生間においても明確な順位が決定され，難関な問題で獲得した点数が高い $a(1)$ のランキングが一番高くなる．第1章で述べた様に絶対ランキング法はランキング生成者側の意図を直接的に反映させるモデルであるため，元のランキングに比べ順位が著しく変動する．そこで，変動を抑制するウェイトを設定し，生成されたランキングベクトルの成分を調整する方法を提案している（詳しくは[1][2]を参照）．それに対し式(3)の相対ランキングを表す $\boldsymbol{r}_R$ は，絶対ランキング法同様 $l_2 - norm$ で正規化されている．学生の順位に関しては，絶対ランキング法と異なり各設問に対し獲得した点数が平均的に高い学生の方がランキングが上がるという特性を持つ．その点を考慮すれば相対ランキング法はその教科に対する各学生の平均的な力量を表現したランキングであると言える．

本発表では，先に述べた各ランキング法を基に統合ランキング，混合ランキングの生成法について紹介する．

参考文献

[1] K.Oshima, I.Hofuku, K.Horimoto, *Application of Weighted Ranking Methods for Tie-Break Simulations*, Proceedings of seventh Int. Coll. on Differential Equations, pp.313-320, 1996.

[2] 大島邦夫，保福一郎，ランキングベクトルとウェイトを適用した試験結果におけるランキング法について，日本応用数理学会論文誌，Vol.6, No.1, pp.133-146, 1996.

[3] K. Oshima, S. Furuichi and I. Hofuku, *An improved ranking procedure applying a continuous weight functions*, International Journal of Applied Mathematics, Vol.2, No.5, pp.553-558, 2000.

[4] I. Hofuku, K. Oshima, *A Total Ranking Based on Examination Scores for a Small Number of Subjects*, INFORMATION, Vol.5, No.4, pp.417-423, 2002.

[5] 保福一郎，大島邦夫，相交えない二群間の共通の試技・競技による混合ランキングの生成法について，日本応用数理学会論文誌，Vol.13, No.1, pp.97-114, 2003