日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

順序制約付きナップサック問題への仮想釘付けアプローチ

02992040 防衛大学校情報工学科 *柳 秉俊 YOU Byungjun
02992050 防衛大学校情報工学科 セニスカ アミント SENISUKA Aminto
01700900 防衛大学校情報工学科 山田 武夫 YAMADA Takeo

1 はじめに

n 個の商品 $1, 2, \ldots, n$ があり, 商品 i の重量と利得をそれぞれ w_i, p_i とする. これらを容量 C のナップサックに詰め込み, 総利得を最大とする問題はナップサック問題と呼ばれ, 多数の研究がなされている [2]. これに対して, 商品間に先行順序関係がある場合を順序制約付きナップサック問題 **(PCKP)**[3] と呼ぶ. これについては釘付けテストによる問題縮小法を提案した [1] が, 順序制約の数が多くなればなるほど, 問題を解くのが困難であった. これに対して, 本稿では仮想釘付けテストを新たに提案し, その有効性を検討する.

2 問題の定式化

有向グラフ $G = (V, E)$ において, 節点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ は商品, E は商品間の順序関係を表すとする. 順序関係の定義から, G は無閉路有向グラフであり, その節点はトポロジカルにソートされていると仮定してよい. ここで, 商品 i の採否を表す決定変数 x_i を用いると, 上の問題は 0-1 整数計画問題として以下のように定式化される.

PCKP:

$$
\begin{aligned}
\text{maxmize} \quad & \sum_{i \in V} p_i x_i & (1)\\
\text{subject to} \quad & \sum_{i \in V} w_i x_i \leqq C & (2)\\
& x_i \geqq x_j, \quad \forall (i,j) \in E & (3)\\
& x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in V & (4)
\end{aligned}
$$

PCKP は $E = \emptyset$ の場合は通常のナップサック問題で, 後者がすでに $\mathcal{NP}$-困難なので, やはり $\mathcal{NP}$-困難である.

3 上下界値

$(i,j) \in E$ に付随するラグランジュ乗数を $\lambda_{ij} \geqq 0$ とし, それらの全体を $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{ij})$ とすると, ラグランジュ関数は

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &:= \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij}(x_i - x_j)\\
&= \sum_{j=1}^{n} (p_j + \sum_{k \in S_j^+} \lambda_{jk} - \sum_{i \in S_j^-} \lambda_{ij}) x_j
\end{aligned}
$$

となる. ここに $S_j^+ (S_j^-)$ は節点 v_j を始点 (終点) とする枝の終点 (始点) の集合を表す. さらに, 0-1 条件を連続緩和したときの問題

LPCKP(λ):

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})\\
\text{subject to} \quad & \sum w_j x_j \leqq C\\
& 0 \leqq x_j \leqq 1, \quad \forall i \in V
\end{aligned}
$$

の最適目的関数値を $\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ とすると, これは $\boldsymbol{\lambda}$ について区分的に線形な凸関数となり, 劣勾配法によって $\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ を最小とする $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger \geqq 0$ を得ることが出来る. このときの目的関数値を PCKP の上界値 UB とする.

$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger$ における **LPCKP**$(\boldsymbol{\lambda}^\dagger)$ の解を $\boldsymbol{x}^\dagger = (x_i^\dagger)$ とすると, これを多少修正して PCKP の実行可能解が得られる. さらに, この解をグリーディ法などにより改善したときの目的関数値を下界値 LB とする.

4 釘付けテスト

4.1 従来の釘付けテスト

$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger$ におけるラグランジュ緩和問題は通常の (連続型) ナップサック問題なので, 釘付けテスト [4] により一部の変数を 0 または 1 に固定し, 問題を縮小することが出来る. また, PCKP では, $x_j = 1(0)$ とすると, その節点の上流 (下流) はすべて 1(0) に固定されるので, このことを利用して, ブロック釘付けテスト [1] を行うことも出来る. しかし, 順序枝の数が多くなると, UB と LB の gap が大きくなり, 解き難くなる欠点があった.

4.2 仮想釘付けテスト

式 (2)〜(4) を満たす解 $x=(x_j)$ 全体の集合を $\mathbf{X}$ とする. UB と LB の間で任意の下界値を想定し, これを試行値 l と呼ぶ. UB と l を用いて釘付けテストを実行すると, 一部の x_i が 1 または 0 に固定される. 1, 0 に固定される変数の添字集合をそれぞれ $F_1(l), F_0(l)$ として, 次を考える.

縮小問題 $R(l)$:

$$\begin{array}{ll} \text{maxmize} & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{subject to} & x \in \mathbf{X} \\ & x_i = 1, \quad i \in F_1(l) \\ & x_i = 0, \quad i \in F_0(l) \end{array}$$

この問題の最適目的関数値を z_l^* と記し, l に対する実現値と呼ぶ. ただし, $R(l)$ が実行不可能なら, $z_l^* = -\infty$ と置く. このとき, 以下が成立する.

定理

(i) $l \leq z^* \Rightarrow z_l^* = z^*$

(ii) $l > z^* \Rightarrow z_l^* \leq z^*$

(iii) $l \leq l' \Rightarrow z_l^* \geq z_{l'}^*$. 特に, $R(l)$ が実行不可能 $\Rightarrow$ $R(l')$ も実行不可能.

(iv) $l \leq z_l^* \Rightarrow z_l^* = z^*$

上の定理より, 適当な l で釘付けテストを行い, $R(l)$ を解いたとき, (iv) が成立していれば問題は解けたことになる. このとき, $gap := UB - l$ が小さいと, $R(l)$ は元問題よりはるかに小さい問題となっていることが多いので, この解法が有利と期待される. (iv) が成立しない場合の処理を含めて, 以下の解法を提案する.

仮想釘付けテスト

Step 1. $l \leftarrow \max\{UB-\alpha, LB\}$

Step 2. 試行値 l で釘付けテストを行い, その結果生じた $R(l)$ を解いて z_l^* を求める.

Step 3. $l \leq z_l^*$ なら Step5 へ, そうでなければ Step4 へ進む.

Step 4. $l \leftarrow \max\{l-\alpha, z_l^*\}$ として Step2 へ戻る.

Step 5. $z_l^* = z^*$ で, 最適解が得られた.

5 数値実験

$n=1000, C=250n$ で, w_i, p_i を [1,1000] 間の一様乱数より発生させたものを用い, $m(:=|E|)$ を変えながら, ブロック釘付けテストを行った.

表 1: 実験結果 (各 10 題の平均)

m	107.4	206.2	406.0
gap$(:= UB - LB)$	59.5	85.3	191.9
残変数	117.0	163.2	315.6
残制約式	6.0	14.4	73.2
縮小過程 (sec)	0.35	0.62	1.51

表 1 から, m が多くなればなるほど上下界値のギャップが大きくなり, 問題の縮小効果が減少することがわかる. そこで, m=406.0 の場合について仮想釘付けテストを適用したのが下の表である.

表 2: 実験結果 (各 10 題の平均)

	ブロック釘付け	仮想釘付け
gap$(:= UB - LB)$	191.9	56.4
残変数	315.6	120.5
残制約式	73.2	19.5
縮小過程 (sec)	1.51	1.57
$CPU_{NUOPT}(sec)$	3.27	0.80
合計 (sec)	4.77	2.37

これより, 順序制約が多い PCKP でも仮想釘付けテストによって問題が大幅に縮小されることがわかった.

6 まとめ

順序制約付きナップサック問題において仮想釘付けテストを検討し, 順序制約が多くても, かなり大型の問題を解けるようになった. 今後, 計算機実験をより本格的に行い, その結果と考察を発表当日に報告する予定である.

参考文献

[1] 柳 秉俊ほか, “順序制約付きナップサック問題へのラグランジュ・アプローチ”, OR 学会春季研究発表会 (早稲田大学, 2004.3.17-18)

[2] Martello, S., Toth, P., *Knapsack Problrems: Algorithms and Computer Implementations*, Wiley, New York (1990).

[3] Samphaiboon, N., Yamada, T., “Heuristic and exact algorithms for the precedence-constrained knapsack problem”, JOTA **105** (2000), 659-676.

[4] 今野 浩, 鈴木久敏 (編), 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連, 1982.