招待講演

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

単調ブール関数の双対化問題について

01605984　大阪大学　　牧野　和久　　　MAKINO Kazuhisa

0(偽)，あるいは，1(真) の値をとる変数を命題変数とよぶ．ブール関数 f とは，n 個の命題変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の値に応じて 0，あるいは，1 の値をとる関数，すなわち，$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ である．ブール関数 f が単調であるとは，任意のベクトル $v, w \in \{0,1\}^n$ が $v \leq w$ をみたす（すなわち，$v_j \leq w_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$）とき，$f(v) \leq f(w)$ が成立することをいう．良く知られているように，この単調関数は，以下のような単調な（否定の記号を用いない）論理積形で記述することができる．

$$\varphi \;=\; \bigwedge_{E \in \mathcal{E}} \Big(\bigvee_{i \in E} x_i \Big),$$

ただし，$\mathcal{E} \subseteq 2^{\{1,\ldots,n\}}$．たとえば，$\varphi = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ は，単調ブール関数を表現している．この φ をよく見ると，4 番目の節（論理和）$(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ を除いてもよいこと，すなわち，φ と $\varphi' = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)$ が等価であることに気が付く．これは，φ をみたすベクトルは，必ず 2 番目の節 $(x_2 \vee x_3)$ を満たすので，自動的に 4 番目の節も満たされるからである．単調論理積形において，このような冗長な節を取り除いたものを主論理積形とよぶ．単調ブール関数においては，この主論理積形は一意であることが知られている．

ブール関数 f の双対 f^d とは，

$$f^d(x) \;=\; \overline{f}(\overline{x})$$

と定義される．たとえば，上記の φ で表現される関数の双対は，$\psi = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)$ と表される．

本論文では，以下に示す単調ブール関数の双対化問題について紹介する．

単調双対化問題
入力: 単調ブール関数 f の主論理積形 φ.
出力: f の双対関数 f^d の主論理積形 ψ.

単調双対化問題は，データベース理論，機械学習，データマイニング，人工知能，数理計画，分散システムなど様々な分野に現れる問題と計算量的に等価であることが知られている (例えば，[1, 2, 3, 4, 5])．

この単調双対化問題の出力サイズは，入力サイズの指数オーダになる場合がある．例えば，入力 $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{k}(x_i \vee y_i)$ に対する出力は，$\psi = \bigwedge_{\substack{z_i \in \{x_i, y_i\} \\ i=1,\ldots,k}} \Big(\bigvee_{i=1}^{k} z_i\Big)$ であり，$|\psi| = 2^{|\varphi|}$ となる．このような問題（列挙問題とよばれる）は，通常，入力と出力の両方のサイズを基準に評価され，近年盛んに研究されている．ここで紹介する単調双対化問題は，列挙分野の中心的な問題であり，上記に示すように応用分野の広さなどから古くから理論と応用の両面から盛んに研究されている．しかしながら，未だに出力多項式（すなわち，入出力長の多項式）時間で計算可能であるかどうか分かっていない ([5, 6, 13])．このことは，[5, 8, 9, 11, 13, 14] などの解説論文，計算量理論における未解決リストからもよく分かる．

現時点においては，Fredman と Khachiyan による $N^{O(\log N/\log\log N)}$ 時間アルゴリズムが最速である [7]．ただし，$N = |\varphi| + |\psi|$．このことから，単調双対化問題に対応する非双対性判定問題（すなわち，与えられた 2 つの単調な論理積形 φ と ψ が $\varphi^d \neq \psi$ であるかどうか判定する問題）は，NP に属するが，NP-困難ではなさそうであることが分かる．[1]

上記に示すように，Fredman と Khachiyan [7] は，計算時間を用いることで，非双対性判定問題が NP-困難でないという（ある意味での）根拠を与えた．一方，[6] では，非双対性判定問題が $O(\log^2 N/\log\log N)$ 個の非決定性ビットを用いることで解けることを示し，非決定性ビット長を用いることで NP-困難でないという根拠を与えている．

また，理論と応用の両観点から論理積形 φ の様々な部分クラスに対して，出力多項式時間で双対化可能であることが示されている．たとえば，各節の長さが k 以下である論理積形 k-CNF や，各変数が高々k 回だけ現れる論理積形 read-k-CNF は，k が定数であれば，出力多項式時間で双対化可能である [3, 4]．

しかしながら，これらの結果の多くは，対象となる

[1] ほとんどの計算量理論の専門家によって，P≠NP のように，準多項式時間で解ける問題は，NP-困難ではないと信じられている．

部分クラスに対して個別に議論しており，必ずしも適応範囲が広くなかった．[12] では，最大潜伏度の概念を提案することで，幅広い部分クラスで出力多項式時間で双対化可能であることを示している．例えば，2-単調，マトロイド，部分 Δ-閾などの部分クラスが効率良く解けることを示している．さらに，このアルゴリズムを用いることで，ほとんどすべての単調論理積形が出力多項式時間で双対可能である，という確率的な性質も示されている [15].

また，[6] では，Johnson と Yannakakis と Papadimitriou の 2-CNF のクラスに対する単調双対化アルゴリズム [10] を拡張することで，一般の単調論理積形にも適用可能なアルゴリズムを開発している．このアルゴリズムの適用範囲は非常に広く，それまでに提案されていた多くの肯定的な結果を改善している．これらの改善は，非退化，read-k，非閉路，限定木幅などのクラスに及ぶ.

今後の課題は，理論面では，単調双対化問題の正確な計算量を求めることである．もちろん出力多項式時間アルゴリズムの開発ができればよいのであるが，未だに非双対性判定問題が coNP に属するかどうか分かっておらず，P には属さないと信じている研究者も多いのが現状である．また，P 困難であるかどうか，あるいは，NP には属するが，P や NPC に属さないと信じられている他の問題，例えば，グラフ同型性判定問題などとの関係も分かっていない.

本稿では，紙面の都合上，単調双対化問題の応用，および，アルゴリズムの実験的解析に関する解説は省略したが，これらも盛んに研究が行われている．今後，さらに実用的なアルゴリズムを開発することが応用上重要な課題である.

参考文献

[1] C. Bioch and T. Ibaraki, Complexity of identification and dualization of positive Boolean functions, *Inf. Comput.*, 123 (1995), 50–63.

[2] E. Boros, K. Elbassioni, V. Gurvich, L. Khachiyan, and K. Makino, An Intersection Inequality for Discrete Distributions and Related Generation Problems, In: *Proc. 30th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming* (ICALP03), pp. 543–555, LNCS 2076, 2003.

[3] C. Domingo, N. Mishira and L. Pitt, *Efficient read-restricted monotone CNF/DNF dualization by learning with membership queries*, Machine Learning, 37 (1999), 89–110.

[4] T. Eiter and G. Gottlob, Identifying the minimal transversals of a hypergraph and related problems, *SIAM J. Comput.*, 24 (1995), 1278–1304.

[5] T. Eiter and G. Gottlob, Hypergraph transversal computation and related problems in logic and AI, In: *Proc. 8th European Conference on Logics in Artificial Intelligence* (JELIA02), pp. 549–564, LNCS 2224, 2002.

[6] T. Eiter, G. Gottlob and K. Makino, New results on monotone dualization and generating hypergraph transversals, *SIAM J. Comput.* 32 (2003), 514–537.

[7] M. Fredman and L. Khachiyan, On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms, *J. Algorithms*, 21 (1996), 618–628.

[8] 茨木俊秀, 単調論理関数の同定問題とその複雑さ, 室田一雄 (編), 離散構造とアルゴリズム III, 近代科学社, 東京, pp. 1–33, 1994.

[9] D. S. Johnson, Open and closed problems in NP-completeness. Lecture given at *the International School of Mathematics "G. Stampacchia": Summer School "NP-Completeness: The First 20 Years"*, Erice (Sicily), Italy, 20 - 27 June 1991.

[10] D. S. Johnson, M. Yannakakis, and C. H. Papadimitriou, On generating all maximal independent sets, *Inf. Process. Lett.*, 27 (1988), 119–123.

[11] L. Lovász, Combinatorial optimization: Some problems and trends, *Tech. Report DIMACS* 92-53, RUTCOR, Rutgers University, 1990.

[12] K. Makino and T. Ibaraki, The maximum latency and identification of positive Boolean functions, *SIAM J. Comput.*, 26 (1997), 1363–1383.

[13] H. Mannila, Local and global methods in data mining: Basic techniques and open problems, In: ICALP02, pp. 57–68, LNCS 2380, 2002.

[14] C. Papadimitriou, NP-completeness: A retrospective, In: ICALP '97, pp. 2–6, LNCS 1256, 1997.

[15] I. Shmulevich, A. D. Korshunov, and J. Astola, Almost all monotone Boolean functions are polynomially learnable using membership queries, *Inf. Process. Lett.*, 79 (2001), 211–213.