日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

母集団を想定したAHPにおける誤差不等分散の場合のウエイト推定法と比較対選択法の提案

筑波大学　高橋 磐郎 TAKAHASHI Iwaro
HRR株式会社 組織行動研究所　＊沖 嘉訓 OKI Yoshinori

1　はじめに

AHPのウエイト推定法としては固有ベクトル法, 対数最小二乗法がよく知られている. このうち, 対数最小二乗法では, 比較対象要素 i と j を比較した値 a_{ij} について, モデル式 $\dot{a}_{ij} = \dot{u}_i - \dot{u}_j + \dot{e}_{ij}$, $\sum_{i=1}^{n} \dot{u}_i = 0$ を想定し, 行列を用いて表現した次式に対して最小二乗法を適用して $\dot{u}$ の推定値を求める. ここで, $\dot{x} = \log x$, n は比較対象要素の数, l は全ての要素が1で長さが n のベクトルである.

$$\dot{a} = X\dot{u} + \dot{e}, \qquad (\text{ただし}, l^{\top}\dot{u} = 0). \tag{1}$$

$n = 4$ の場合の例を下に示す.

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{14} \\ \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{24} \\ \dot{a}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{e}_{12} \\ \dot{e}_{13} \\ \dot{e}_{14} \\ \dot{e}_{23} \\ \dot{e}_{24} \\ \dot{e}_{34} \end{bmatrix}.$$

ところで通常, 最小二乗法では次のことが仮定される.

仮定1) $E[\dot{e}] = O$
仮定2) $E[\dot{e}\,\dot{e}^{\top}] = \sigma^2 I$

これらの仮定は, 誤差の期待値が0であること, 各比較対に含まれる誤差の分散が等しいこと, 異なる比較対毎の誤差が無相関であることを表している. 上記の仮定の元で, 線形モデル(1)による $\dot{u}$ の最小二乗推定量は不偏であり, 推定値の分散を最小にすることが知られている.

しかし, AHPにおいて全ての比較対に含まれる誤差の分散が等しいという等分散性の仮定は, やや強いものであり, 現実的ではないケースも少なくないと思われる.

村山ら[2]は, 比較対毎に含まれる誤差分散が回答の確信度の逆数に比例するとの仮説に基づき, 重み付き最小二乗法（一般化最小二乗法）を用いて, 誤差不等分散に対応した $\dot{u}$ を推定することを提案している.

本稿では比較対毎に含まれる誤差が, 確信度のように評価者の主観的な特性に起因するものではなく, 主に各比較対に固有のものであると捉える別のモデルを提案する. また, その場合に必要となる誤差分散の推定方法と, 不完全情報AHPの比較対選択問題への適用についても合わせて提案する.

2　評価者母集団を想定したモデル

評価者の無限母集団 P を想定し, P から無作為に取り出したサンプル ν について以下のモデルを考える.

$$\dot{a}(\nu) = X\dot{u}(\nu) + \dot{\epsilon}, \quad l^{\top}\dot{u}(\nu) = 0. \tag{2}$$

$\dot{u}(\nu)$ と $\dot{\epsilon}$ に関する仮定として,

$$E[\dot{\epsilon}] = O, \quad E[\dot{u}(\nu)\,\dot{\epsilon}] = O$$

に加えて, 仮定2)を誤差不等分散の場合に拡張した 仮定2)'

$$E[\dot{\epsilon}\,\dot{\epsilon}^{\top}] = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{12}^2 & & & O \\ & \sigma_{13}^2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sigma_{(n-1,n)}^2 \end{bmatrix}.$$

を導入する.

上記のモデルにおいて, もし Ω が既知であれば(2)の両辺に左から $\Omega^{-1/2}$ を乗じた

$$\Omega^{-1/2}\dot{a}(\nu) = \Omega^{-1/2}(X\dot{u}(\nu) + \dot{\epsilon})$$

は, 元の仮定2)を満たす. 従って $l^{\top}\dot{u}(\nu) = 0$ の元で上式に最小二乗法を適用し,

$$\left[\Omega^{-1/2}\left(\dot{a}(\nu) - X\dot{u}(\nu)\right)\right]^{\top}\left[\Omega^{-1/2}\left(\dot{a}(\nu) - X\dot{u}(\nu)\right)\right] - \lambda\, l^{\top}\dot{u}(\nu)$$

を各パラメータで偏微分して 0 と置いた式を解いて得られる $\dot{u}(\nu)$ の推定量

$$\hat{u}(\nu) = (X^\top \Omega^{-1} X + J)^{-1} X^\top \Omega^{-1} \dot{a}(\nu) \qquad (3)$$

は最小分散線形不偏推定量である. λ はラグランジュの未定乗数, J は全ての成分が 1 の $n \times n$ 行列である.

3 誤差分散の推定

Ω は一般には未知のパラメータだが, 予備調査などによって同一の比較対のセットに関して繰り返し実施されたデータが多数存在する場合には, 以下の方法でデータから (2) における Ω の推定値 $\hat{\Omega}$ を得ることが可能である[1] (3) の Ω の代わりに $\hat{\Omega}$ を用いれば, ウエイトの推定値を算出することができる.

< STEP-1 >
母集団 P から無作為に取り出した標本 ν (1, 2, ..., s) の同一の一対比較対のセットに対する回答データベクトルを $a(\nu)$ とする. 誤差等分散の仮定のもとで, $\dot{u}(\nu)$ を推定した場合の残差ベクトルの平方の平均値

$$D = \frac{1}{s}\sum_{\nu=1}^{s}\left(\dot{a}(\nu) - X\hat{u}(\nu)\right)\left(\dot{a}(\nu) - X\hat{u}(\nu)\right)^\top$$

の対角成分を Ω の初期推定値 $\hat{\Omega}_1$ (非対角成分は 0) とし STEP-2 へ進む ($p = 2$).

< STEP-(p) > ($p \geq 2$)
STEP-($p-1$) で推定した $\hat{\Omega}_{p-1}$ の対角成分 $\mathrm{diag}\,\hat{\Omega}_{p-1}$ を Ω の推定値として用いた場合の D の対角成分を $\hat{\Omega}_p$ とする. $\max \mid \mathrm{diag}\,\hat{\Omega}_p - \mathrm{diag}\,\hat{\Omega}_{p-1} \mid \leq \Delta$ ならば, $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_p$ として推定を終了する (Δ は微小な非負の値). それ以外の場合は, $p = p + 1$ としてこのステップを繰り返す.

4 不完全情報 AHP の比較対選択

比較対に対する回答の一部が欠測である場合を不完全情報ケースと呼ぶ. 比較対象要素が多数存在する場合には, 評価者が回答すべき比較対が膨大になることがある. これを避けるために一部の比較対について初めから欠測として, 回答する比較対を減らす方法が提案されている. Miyake, *et al.* [1] は, 比較対毎の誤差が等分散で, 回答する比較対の数を要素数の 2 倍に設定したときに, $\dot{u}$ の推定値の分散を最小にする比較対の組み合わせ (デザインと呼ぶ) を示した. しかし, 誤差等分散の仮定が崩れている場合には, 最適なデザインは誤差等分散の場合とは異なったものとなる. ここでは, Ω が既知の場合に対応したデザイン選択の基準と, 最適デザインを近似的に求めるためのいくつかの算法を示す.

比較対の選択基準としては, Miyake, *et al.* [1] と同様, $\dot{u}$ の推定値の分散を用いる. 推定値の分散が大きいことは, 推定結果が不安定で推定精度が低いことを示すから, これをできるだけ小さくすることが望ましい. 誤差不等分散の場合の $\dot{u}$ の推定値の分散の和は, $\sum_{i=1}^{n} V[\hat{u}_i - \dot{u}_i]$ に, (3), (2) を順次代入して整理し,

$$F[X,\Omega] = \sum_{i=1}^{n} V[\hat{u}_i - \dot{u}_i] =$$
$$\mathrm{tr}\ (X^\top \Omega^{-1} X + J)^{-1} X^\top \Omega^{-1} X (X^\top \Omega^{-1} X + J)^{-1}$$

と表すことができる. 回答する比較対の数 m が与えられたとき, X の m 本の行ベクトルから構成した行列を X_*, 対応する誤差分散行列を Ω_* とし, $F[X_*, \Omega_*]$ を最小にする X_* を求める.

< Minimal Error Variances 法 >
各比較対に含まれる誤差の分散 (Ω の対角成分) の小さい順に m 個の比較対 (X の行) を選ぶ. ここで, $X_*^\top X_*$ の i 行 j 列成分が -1 の場合に枝 i-j が存在するようなグラフを考える. このグラフが連結でなければ $\dot{u}$ の推定値を求めることができない. 非連結の場合には, X_* に含まれる比較対の誤差の総和ができるだけ小さくなるように工夫しながら適宜比較対を入れ替えて, グラフが連結になるような X_* を構成する.

< Multiple Cycle with Minimal Errors 法 >
m が要素数 n の c 倍 (c は自然数) のときに, グラフが全ての比較対象要素を通る c 個の閉道 (サイクル) を構成し, かつ誤差分散の総和ができるだけ小さくなるような X_* を求める.

[1] 厳密には Ω の要素の比がわかればよい. ここでは推定の自由度に関する議論は行わない.

参考文献

[1] Miyake,C., *et al.*, 2-Cyclic Design in AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.46,No.4,429-447 (2003).

[2] 村山 直人 ほか, 重み付き最小二乗法を用いた AHP のウエイト推定法に関する研究, 日本経営工学会学会誌, Vol.53,No.5,369-377, (2002).