1-G-4

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

重み順次法の提案

01104744 名城大学 木下 栄蔵 KINOSHITA Eizo
01307154 名古屋大学 *田地 宏一 TAJI Kouichi
02203303 名城大学 杉浦 伸 SUGIURA Shin

1 はじめに

Saaty[4] によって提案された AHP (Analytic Hierarchy Process) は，意思決定過程の階層化，評価基準・代替案の一対比較による重要度の推定，および各評価基準における代替案の重要度の加法和による統合からなる意思決定手法であり，総合目的からトップダウン的に評価を行うことで，客観的な意思決定を可能にしている．しかし，実際の意思決定においては，特定の代替案（支配代替案）を念頭に置き，それを基準として評価を行うというということがしばしば行われる．これをモデル化したのが，木下，中西 [1] により提案された支配代替案法（支配型 AHP）である．

ところで，支配代替案が複数あり，それぞれの評価基準のウェイトが異なる場合には，支配代替案毎に総合評価値が異なりうる．そのよう場合に対し，木下，中西 [2] はまた，それらのウェイトを統合する手法として一斉法を提案している．本研究では，支配代替案が複数ある場合の新たなウェイトの統合法を提案する．提案する手法は，基準となる代替案が考慮された順序に従ってウェイトを統合する方法であり，順次法と呼ぶことにする．

2 順次法のアルゴリズム

m 評価基準の下で，n 代替案を評価する問題を考える．a_{ij} を評価基準 j の下での代替案 i の評価値とし，これらを n 行 m 列の行列に並べたものを $A=(a_{ij})$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$ と書く．また，代替案 k の評価値 a_{kj} を対角に並べた行列を $A_k=\mathrm{diag}(a_{k1},\dots,a_{km})$ と記す．一般性を失うことなく，代替案 $1,\dots,l$ $(l\le n)$ は支配代替案であるとし，支配代替案 k $(k=1,\dots,l)$ の評価基準のウェイトベクトルを b_k とかく．また，e はすべての要素が 1 であるようなベクトルである．

すると，順次法のアルゴリズムは以下のようになる．

Algorithm

Step 0 $b_k^0 := b_k$ $(k=1,\dots,l)$, $t:=0$ とおく．

Step 1 $b_1^{t+1} := b_1^t$ とする．

Step 2 $k=1$ から $l-1$ まで以下を行う．

$$b_{k+1}^{t+1} := \frac{1}{2}\left(b_{k+1}^t + \frac{A_{k+1}A_k^{-1}b_k^{t+1}}{e^{\mathrm{T}}A_{k+1}A_k^{-1}b_k^{t+1}}\right)$$

Step 3

$$b_1^{t+1} := \frac{1}{2}\left(b_1^t + \frac{A_1A_l^{-1}b_l^{t+1}}{e^{\mathrm{T}}A_1A_l^{-1}b_l^{t+1}}\right)$$

Step 4 $b_k^{t+1}=b_k^t$ $(k=1,\dots,l)$ ならば，$b_k^* := b_k^{t+1}$ として終了．そうでなければ，$t:=t+1$ として Step 1 へ戻る．

一斉法については，木下，関谷ら [3] によりその収束定理が示されているが，順次法についても同様の収束定理が成り立つ．

定理 1 重み順次法のアルゴリズムは，有限回の反復で終了するか，b_k^t $(k=1,\dots,l)$ は正のベクトル b_k^* $(k=1,\dots,l)$ にそれぞれ収束する．

また，単価比一定の法則が成り立つ．

定理 2 b_k^* $(k=1,\dots,l)$ を重み順次法によって得られたベクトルとすると，$A_k^{-1}b_k^*$ はすべて同じ方向を持つ．

上の二つの定理の結果，重み順次法で集約されたウェイトベクトル b_k^* の一つを用いることにより，総合評価値は

$$AA_k^{-1}b_k^*$$

と求められる．

3 数値例

二つの評価基準の下で，三つの代替案を評価する例を考える．行列 A は，

$$A=\begin{pmatrix}1/6 & 0.6\\ 1/3 & 0.3\\ 1/2 & 0.2\end{pmatrix}$$

で与えられる．ここでは，三つの代替案すべてが支配代替案であるとし，それらの評価基準のウェイトは

$$b_1=\begin{pmatrix}0.4\\0.6\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}0.7\\0.3\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}0.2\\0.8\end{pmatrix}$$

で与えられているものとする．

順次法では，支配代替案の順序により結果が異なる．この例では全部で6通りの順序，すなわち，1 → 2 → 3，1 → 3 → 2，2 → 1 → 3，2 → 3 → 1，3 → 1 → 2，3 → 2 → 1の場合がある．例えば，1 → 2 → 3の場合の結果は，

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.186 \\ 0.814 \end{pmatrix},\ b_2^* = \begin{pmatrix} 0.478 \\ 0.522 \end{pmatrix},\ b_3^* = \begin{pmatrix} 0.805 \\ 0.195 \end{pmatrix}$$

となった．これより，総合評価値を求めると，

$$AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.779 \\ 0.694 \end{pmatrix}$$

$$AA_2^{-1}b_2^* = \begin{pmatrix} 1.283 \\ 1 \\ 0.891 \end{pmatrix}$$

$$AA_3^{-1}b_3^* = \begin{pmatrix} 1.4383 \\ 1.1216 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，大きさは違うが，すべて同じ比率となっていることが分かる．また，残りの5つの場合について得られた、b_1^*と総合評価値$AA_1^{-1}b_1^*$はそれぞれ以下のようになった．

- 1 → 3 → 2の場合

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.172 \\ 0.828 \end{pmatrix},\ AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.758 \\ 0.654 \end{pmatrix}$$

- 2 → 1 → 3の場合

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.83 \end{pmatrix},\ AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.755 \\ 0.648 \end{pmatrix}$$

- 2 → 3 → 1の場合

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.183 \\ 0.817 \end{pmatrix},\ AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.775 \\ 0.685 \end{pmatrix}$$

- 3 → 1 → 2の場合

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.87 \end{pmatrix},\ AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.695 \\ 0.535 \end{pmatrix}$$

- 3 → 2 → 1の場合

$$b_1^* = \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.889 \end{pmatrix},\ AA_1^{-1}b_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.667 \\ 0.481 \end{pmatrix}$$

このように，順序に応じて結果が異なっていることが分かる．とくに，代替案3を最初に考慮した場合には，他の場合よりも代替案1の評価が高くなっていることが分かる．

4 おわりに

評価基準のウェイトが複数ある場合に，それらを統合する方法としては，ANPにおけるスーパーマトリックス法や，支配代替案法の一斉法があるが，これらは代替案を対等に取り扱う方法である．本研究では，意思決定における順序依存性をモデルに取り入れた順次法を提案し，数値例により，何らかの順序依存性が表れることを示した．提案手法が，どの程度順序による影響を反映しているかを理論的に解析することは，今後の重要な課題である．

参考文献

[1] 木下栄蔵，中西昌武，AHPにおける新しい視点の提案，土木学会論文集 No. 569 IV–36 (1997) 1-8.

[2] E. Kinoshita and M. Nakanishi, "Proposal of new AHP model in light of dominative relationship among alternatives," *Jouranl of the Operations Research Society of Japan* 42 (1999) 180-198.

[3] E. Kinoshita, K. Sekitani and J. Shi, "Mathematical process of dominant AHP and concurrent convergence method," *Jouranl of the Operations Research Society of Japan* 45 (2002) 198-213.

[4] T.L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process,* McGraw Hill, New York, 1980.