日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

不完全情報における一対比較要素の影響

01007500 慶應義塾大学 ＊小澤 正典 OZAWA Masanori
01104400 法政大学 加藤 豊 KATO Yutaka

1. 一対比較行列と欠損要素

情報が不完全であるとき，一対比較行列には欠損要素が存在する．したがって，この不完全情報のもとでウェイト推定を行うと，各要素のウェイトへの影響力が違ってくる．本研究では，欠損要素がある場合にその要素がないことによる推定ウェイトへの影響を調べることにする．基本的には，その要素の影響は，あるものとして適当な誤差を入れて要素を合成して影響を見ればよい．しかし，その方法であるとウェイトの大きさによるので，欠損パターンの構造からその影響を調べることにした．

2. 幾何平均法と一般平均法

いま，幾何平均法でウェイト推定すると，一対比較行列に欠損要素がない (完全情報) の場合には，その推定ウェイトは各行の幾何平均で与えられるので，その各要素のウェイトへの影響は同じと考えてよいだろう．しかし，欠損要素がある場合には，幾何平均法はつぎような方程式を解く必要があり，この解の指数をとったものがその推定ウェイトとなる．いま，I_i は，第 i 行における欠損要素でない要素番号の集合を表すものする ($|I_i|$ は I_i の要素の数)．幾何平均法の欠損要素があるときの目的関数は，

$$\min_w f(w) = \min_{w_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in I_i} \left(\log a_{ij} - \log w_i + \log w_j\right)^2$$

となる．いま，$x_i = \log w_i, b_{ij} = \log a_{ij}$ とし，逆数性 ($a_{ij} = 1/a_{ji}$) を仮定する．推定ウェイトの積が 1 ($\log w_i$ の和が 0) である推定ウェイトの対数は，つぎの方程式の解で与えられる．

$$|I_i| \cdot x_i + \sum_{j\notin I_i} x_j = \sum_{j\in I_i} b_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

式 (1) において，$|I_i|$ でわると，

$$x_i + \frac{1}{|I_i|} \sum_{j\notin I_i} x_j = \frac{1}{|I_i|} \sum_{j\in I_i} b_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

となる．これは，

$$(I + DU)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書くことができる．ここで，D は対角要素を $1/|I_i|$ とした対角行列，U は欠損要素のある位置の要素を 1 とし他の要素を 0 とした欠損要素の位置を表す行列．いま，$|I_i| > n/2$ であるとすると，$\|DU\| < 1$ となるので，

$$\boldsymbol{x} = (I - (DU) + (DU)^2 + \cdots)\boldsymbol{b}$$

と書ける．したがって，解 $\boldsymbol{x}$ は行列 DU の最大固有値に対応する固有ベクトルの影響を大きく受けると考えてよい．

また，一般平均法において欠損要素がある場合，一般平均法 ($r \neq 0$) では，

$$\min_w f_m(w) = \min_{w_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in I_i} \left(\sqrt{a_{ij}}^{-r} w_j^{-r} - \sqrt{a_{ji}}^{-r} w_i^{-r}\right)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i^{-r} = \text{const.}$$

の最適解が推定ウェイトとなる．この目的関数と制約条件式から，

$$w_i^{-r} \sum_{j\in I_i} a_{ij}^r + \sum_{j\notin I_i} w_j^{-r} = \lambda, \quad \text{for } i = 1, \dots, n$$

の連立方程式の解として w_i^{-r} が与えられる．ここで，λ はラグランジュ乗数．

この式は，

$$w_i^{-r} + \frac{1}{\sum_{j\in I_i} a_{ij}^r} \sum_{j\notin I_i} w_j^{-r} = \frac{\lambda}{\sum_{j\in I_i} a_{ij}^r}$$

であるので，

$$(I + \tilde{D}U)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$$

と書ける．ここで，$\tilde{D}$ は対角要素が，$1/\sum_{j\in I_i} a_{ij}^r$ である対角行列．幾何平均の場合と同様に $\|\tilde{D}U\| < 1$ であるならば，

$$\boldsymbol{y} = (I - (\tilde{D}U) + (\tilde{D}U)^2 + \cdots)\boldsymbol{c}$$

と推定ウェイト w_i^{-r} が計算できることになる．このことは，幾何平均法と同様に解 $\boldsymbol{y}$ は行列 $\tilde{D}U$ の最大固有値に対応する固有ベクトルの影響を大きく受けると考えてよい．

3. 固有値法

固有値法は，欠損データがある場合には，Harker 法が主に行われるが，これは対角要素にその欠損データの数を加えたあとに固有ベクトルを求める方法である．これは，

$$(A+H)\boldsymbol{w} = \lambda_{\max}\boldsymbol{w}$$

として書くことができる．ここで，一対比較行列 a_{ij} の欠損要素があるところは $a_{ij}=0, j \notin I_i$，H は対角行列でその要素の値は $|n-I_i|$．このとき，推定ウェイト $\hat{w}_i$ における「検査行列」は，

$$B = \left((a_{ij}+h_{ij})\frac{\hat{w}_j}{\hat{w}_i}\right) = \hat{W}^{-1}(A+H)\hat{W}$$

である．ここで，$\hat{W}$ は対角要素を $\hat{w}_i$ とした対角行列．いま，整合性がある場合には，h_{ii} の要素を分けて，欠損要素があるところに 1 を入れることにより，$B=\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ とすることができる．さらに，欠損のある要素に誤差を仮定すると，その場合の固有ベクトル z は，

$$(B+\tilde{U})z=\rho z \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{1}\mathbf{1}^\top+\tilde{U})z=\rho z$$

となる．ここで，$\tilde{U}$ は欠損要素の部分にある誤差を入れ，他の部分は 0 にした行列．これは，

$$\left(I-\frac{1}{\rho}\tilde{U}\right)z = \frac{(z^\top\mathbf{1})}{\rho}\cdot\mathbf{1}$$

と書くことができる．$\|\frac{1}{\rho}\tilde{U}\|<1$ であるならば，

$$z=\frac{(z^\top\mathbf{1})}{\rho}\cdot\left(I+\frac{1}{\rho}\tilde{U}+\frac{1}{\rho^2}\tilde{U}^2+\dots\right)\mathbf{1}$$

したがって，欠損要素に誤差を仮定した場合の影響は，行列 $\tilde{U}$ の最大固有値に対応する固有ベクトルの影響を受ける．

4. 欠損要素の影響

幾何平均と一般平均の場合には，その推定ウェイトへの影響は，

$$I-(\tilde{D}U)+(\tilde{D}U)^2+\cdots$$

の行列で表現される．このとき，$U=0$ ならばその推定ウェイトは欠損がない場合になる．したがって，欠損の影響は行列 U にあるものと考えてよい．

また，固有値法であるときは，欠損要素に新たな誤差を付加したときにどのようにウェイトが変化するかを見たものとなっている．したがって，このときは，欠損要素でなくなった場合に生じるウェイト変化を調べることになる．

次に，これらの欠損要素が推定ウェイトに与える影響についての数値例を示す．

数値例：一対比較行列の欠損位置：

$$U=\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

最大固有値：2.38

欠損要素への誤差：対数正規分布 ($\exp[N(0,0.3^2)]$)

シミュレーション回数：100000

真のウェイト	U の固有ベクトル	ウェイト差の標準偏差	
		固有値法	幾何平均法
0.1	0.090	0.00458	0.00438
0.1	0.187	0.00649	0.00626
0.12	0.214	0.00914	0.00887
0.14	0.232	0.01058	0.01025
0.16	0.151	0.01236	0.01206
0.18	0.063	0.00788	0.00756
0.2	0.063	0.00857	0.00822

5. まとめ

幾何平均の場合には，欠損要素の影響は行列 DU で表せるが，欠損の要素数が $n/2$ より多くなると，式 (1) では表せなくなる．このような場合には，欠損要素の行列ではなく，要素がある行列を使用して考察する必要がある．一般平均法の場合も同様に，その欠損要素の影響は行列 $\tilde{D}U$ で表せるが，行列ノルムが 1 以下になるためには欠損要素の数だけでなく，その要素 (a_{ij}) の大きさも問題となる．また，固有値法であると推定ウェイトの大きさにも影響を受けるのでその関係は複雑になるのでさらなる検討が必要である．

参考文献

[1] P.T. Harker,"Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process, " Mathematical Modeling,(1987),9,837-848

[2] K. Sekitani and N. Yamaki,"A Model-based AHP Including the Case of Incomplete Information," Asia Pacific Management Review,(2003),8,241–258

[3] 加藤豊，小澤正典，"一対比較行列に系統的な誤差がある場合の欠損値とウェイト推定法" 日本経営工学会平成 16 年度春季研究発表会予稿集, 2004