日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

複数内部収益率現象の安定性議論

01205220　日本大学生産工学部　篠原　正明
02203370　日本大学生産工学部　*杉山　清史
情報システム研究所　篠原　健

1．はじめに

時点 t＝0 で初期投資額 $f_0(>0)$ を投入し、その後に t＝1，2，…，T とキャシュフロー時系列 $\{f_1, f_2, \ldots, f_T\}$ がともなう投資プロジェクトにおいて、初期投資額 $f_0(>0)$ を、別途、利子率 r で複利運用したときに、終期 t＝T における両者の時価（NFV）が等しくなるような利子率 r を、注目する投資プロジェクトの内部収益率（IRR）と言う。キャシュフロー時系列 $\{f_1, f_2, \ldots, f_T\}$ の中に負値が含まれるような場合には、複数の内部収益率が計算上存在し、実務上、どの内部収益率を選択すればよいかの議論がある。本論文では、この「複数内部収益率現象」に対して、非線形システムの動作点の安定性の議論にもとづく見解を提案する。

2．簡単な例題

初期投資額 f_0＝100(万円)で、t＝1 で f_1＝230(万円)、t＝2 で f_2 ＝−132(万円)のキャシュフローがともなう投資プロジェクト（終期T＝2）を考えよう。

初期投資額 f_0＝100 を利子率 r で複利運用すると、終期（T＝2）での時価 NFV（変数 y_1）は、

$$y_1 = f_0(1+r)^2 \qquad (1)$$

となる。x＝1＋r と変数変換し、f_0＝100 とすれば、

$$y_1 = 100x^2 \qquad (2)$$

を得る。一方、投資プロジェクト $\{f_1, f_2\}$ に対応する NFV（変数 y_2）は、(3)式で与えられる。

$$y_2 = f_1(1+r) + f_2 \qquad (3)$$

すなわち、

$$y_2 = 230x - 132 \qquad (4)$$

となる。

内部収益率 IRR とは、初期投資額と投資プロジェクトの NFV が等しくなるような利子率 r なので、$y_1 = y_2$ とし、非線形方程式 $100x^2 = 230x - 132$ を解くことにより求めることができる。

横軸に「1＋利子率」$x = 1 + r$ を、縦軸に NFV（y_1 と y_2）をとり、両特性を描写すると、2つの特性の交点が非線形方程式の解（非線形システムの動作点）である。

2次方程式を解いて、$x = 1.1$ と $x = 1.2$（r＝0.1 と r＝0.2）の2つの解が得られる。すなわち、この投資プロジェクトは IRR＝0.1 とも、IRR＝0.2 とも評価できる。通常は大きな IRR＝0,2 を選択するとの指針が広く採用されている。

3．静的な議論

IRR＝0.1，0.2 に対応する動作点を各々A，Bとしよう。利子率 r が（時間的に）増加する状況を考えよう。すると、動作点A（IRR＝0.1）では、IRR＝0.1 を境界に $y_1 > y_2$ から $y_1 < y_2$ へ変化する。すなわち、「プロジェクトを採用せず、初期投資額 f_0 を利子率 r で複利運用した方が得な状況（$y_1 > y_2$）」から「プロジェクトにともなうキャシュフロー時系列の NFV の方が大きい状況（$y_1 < y_2$）」へと変化する。同様に、動作点B（IRR＝0.2）は、逆の状況と特徴づけられる。

以上の静的な議論にもとづき、準静的な意味での金利の増加/減少傾向にもとづき、2つの IRR の内の1つを選択することも考えられよう。しかしながら、この方法論ではより中長期的スパンでの金利変動を考慮しなければならず、注目する時点におけるより短期的（動的）な安定性が考慮できない。

4．安定性の議論

1つの動作点に注目して、その IRR を投資担当者が採

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

用したとする。IRR（あるいは$x=1+r$）が微少変動した時に（Δx_2 としよう）、それが投資プロジェクトのNFV（y_2）に与える効果は、Δy_2 である。ここで、Δx_2 の正負は問わない。投資プロジェクトによるNFVの微少変動がΔy_2 となるので、投資担当者は、対応する初期投資額の変動Δy_1に対する利子率の変動Δx_1 を評価する。以上に述べた一連の変動が、各動作点において、投資担当者の心理（あるいは行動）に生じると考えると、初期のIRRに関する微少変動Δx_2 が一巡して初期投資額の変動に対する利子率変動Δx_1 へと及ぼす効果（巡回係数利得P）は、次式で与えられる。

$$\mathrm{P}=\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\times\frac{\Delta x_1}{\Delta y_1}=\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\times\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \qquad (5)$$

投資担当者は、$\Delta x_2 \rightarrow \Delta y_2 = \Delta y_1 \rightarrow \Delta x_1$ との心理的摂動下にあるため、P＞1ならば、利子率とNFVに関する思わくは発散し、対応するIRR案は選択されない（すなわち、不安定なIRR案）。P＜1ならば、利子率とNFVに関する思わくは収束し、対応するIRR案は選択される（すなわち、安定なIRR案）。

2章の例題に以上の安定性議論を適用する。

$$\mathrm{P}=\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\times\frac{\partial x_1}{\partial y_1}=\frac{f_1}{2f_0x} \qquad (6)$$

（$f_0=100,\ f_1=230$）

（ｉ）動作点Ａ（IRR=0.1）… $x=1.1$を代入すると、

$$\mathrm{P}=\frac{23}{22}>1 \qquad (7)$$

（ii）動作点Ｂ（IRR=0.2）… $x=1.2$を代入すると、

$$\mathrm{P}=\frac{23}{24}<1 \qquad (8)$$

すなわち、動作点Ａは不安定で、動作点Ｂは安定であると言える。

5．一般論

終期Ｔの投資プロジェクト$\{f_1, f_2, \ldots, f_T\}$の場合には、次式が成立する。

$$y_1=f_0x_1^T \text{ あるいは } x_1=\left(y_1/f_0\right)^{\frac{1}{T}} \qquad (9)$$

$$y_2=f_1x_2^{T-1}+f_2x_2^{T-2}+\ldots+f_T \qquad (10)$$

従って、巡回係数利得Ｐは、

$$\mathrm{P}=\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\times\frac{\partial x_1}{\partial y_1}=$$

$$\left\{f_1(T-1)x^{T-2}+f_2(T-2)x^{T-3}+\ldots+f_{T-1}\right\}\times\frac{x^{1-T}}{f_0T} \qquad (11)$$

となる。

6．おわりに

複数内部収益率現象に対して、非線形システムの動作点の安定性にもとづく解釈を与え、安定なIRR案と不安定なIRR案に判別できることを示した。本議論においては、投資担当者は当該IRRの変動が注目する投資プロジェクトのNFVにどのような変動を与えるかを優先的に考えるだろうとした点が恣意的である。「当該IRRの変動が手持ち初期投資額f_0のＴ年後の時価NFVにどのように変動するか？」とすれば、議論は正反対の結論となる。このように、若干の議論が残るのは、非線形システムに時間が陽に入っていないからである。時間が陽に入ってなくても、我々の議論では、(9)式と(10)式に方向性を仮定したことにも相当する。

$$y_2 \leftarrow f_1x_2^{T-1}+f_2x_2^{T-2}+\ldots+f_T \qquad (12)$$

$$x_1 \leftarrow \left(y_1/f_0\right)^{\frac{1}{T}} \qquad (13)$$

すなわち、このような方向性が成立する状況下では、提案する安定性の議論は正しいと考えられる。なお本議論に従えば、「通常の単一ＩＲＲ案は、安定である」ことを、付け加えておく。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．