日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

離散時刻モデルにおけるバリアオプション評価の問題について

01604870　政策研究大学院大学　*諸星穂積　MOROHOSI Hozumi
01501020　南山大学　伏見正則　FUSHIMI Masanori

1. はじめに

バリアオプションの一例である up-and-in put を考える．原資産価格の過程を $\{S_t\}$ で表す．バリア値を H とし，行使価格を K，行使日を $t=T$ とする ($H>S_0, K<H$ を仮定しておく)．時刻 0 において原資産価格が s だったとき，このオプションの価格は，

$$u(0,s,H)=\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}[(K-S_T)^+1_{\{\max_{0\le t\le T}S_t\ge H\}}] \tag{1}$$

で表される．ここで r は安全利子率を表し，$(x)^+=\max(0,x)$, 1_A は A が真のとき 1，偽のとき 0 をとる指示関数を表す．この期待値は，原資産価格過程が連続時間モデル

$$\mathrm{d}S_t=rS_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}B \tag{2}$$

に従うとするならば解析解が求まる．本論で考えたいのは，原資産価格が，離散的な時刻 $i\Delta t$ ($i=0,\ldots,m$, $\Delta t=T/m$ とする) のみで観察できる場合である．すなわち，原資産価格の過程は次のような式で表される系列 $\{\tilde{S}_i;\tilde{S}_i=S_{i\Delta t}, i=0,\ldots,m\}$ となる．

$$\tilde{S}_i=\tilde{S}_{i-1}\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right). \tag{3}$$

$Z_i\sim N(0,1)$. オプション価格は

$$\tilde{u}_m(0,s,H)=\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}[(K-\tilde{S}_m)^+1_{\{\max_{0\le i\le m}\tilde{S}_i\ge H\}}] \tag{4}$$

となる．[1] では次の関係が示されている．

$$\tilde{u}(0,s,H)=u(0,s,H\mathrm{e}^{\beta_1\sigma\sqrt{\Delta t}})+\mathrm{o}(m^{-\frac{1}{2}}). \tag{5}$$

但し，$\beta_1\approx 0.5826$. この結果は，$H\gg s$ の場合の漸近展開に基づいているが，数値実験によると H が比較的 s に近い場合でもよい近似を与えることが [1] で述べられている．この近似によれば，離散時間のバリアオプションの価格が，バリア値を補正した (解析的に求まる) 連続時間のバリアオプションの価格によって近似的に計算できるわけである．

少しこの式の見方を変えれば，あらかじめバリアを $H\mathrm{e}^{-\beta_1\sigma\sqrt{\Delta t}}$ に補正してから離散時間のオプション価格を (4) により計算すると，連続時間のオプション価格が計算できそうである．本報告では，計算された価格がどのくらい連続時間の価格に近いかで，バリア補正量の正しさを検証してみる．そのためいくつかのバリアオプションの数値解法による実験を行ってみる．

2. バリアオプションの数値解法

重点サンプリング

最も素朴なバリアオプションの数値解法は，正規乱数 Z_i を発生させて (3) によりパスを複数計算し，それらのパスによって期待値 (4) を求める方法であろう．より効率な方法として，次のような重点サンプリングが提案されている [2]. (3) を次のように書き直す．

$$\tilde{S}_i=\tilde{S}_0\exp(L_i),\quad L_i=\sum_{j=1}^{i}X_j. \tag{6}$$

ここで，$X_1,X_2,\ldots\sim N((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t,\sigma\sqrt{\Delta t})$, i.i.d. 対数変換して，$-c=\log(K/\tilde{S}_0)$, $b=\log(H/\tilde{S}_0)$ と置く．$\{\tilde{S}_m\le K\}$ は $\{L_m\le -c\}$ に，$\{\tilde{S}_i\ge H\}$ は $\{L_i\ge b\}$ にそれぞれ対応する．基本的なアイデアは，行使日までの間にバリアに到達する確率と，行使日に行使価格より下になる確率を，できるだけ大きくするように L_i のドリフト $(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$ を変更し，その補正のための尤度比を掛けておくことである．X_j のキュムラント母関数は，

$$\psi(\theta)=(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\theta^2 \tag{7}$$

になるが，次式を満たすように θ_-,θ_+ を決める．

$$\psi(\theta_-)=\psi(\theta_+) \tag{8}$$

$$\frac{b}{\psi'(\theta_+)}+\frac{c+b}{-\psi'(\theta_-)}=m \tag{9}$$

上の式は，後述する尤度比を簡略にするためのの条件であり，下の式は全体で m ステップあるうちで，最初はドリフト $\psi'(\theta_+)$ で b を目指し，b に到達した

後は c を目指してドリフト $\psi'(\theta_-)$ で進むということを考えている．上式よりパラメータ $\theta_\pm$ は次のように決まる．

$$\theta_\pm = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) \pm \frac{2b+c}{m\sigma^2\Delta t}. \qquad (10)$$

停止時刻 τ を L_i が初めて b を上回る時刻とする．

$$\tau = \min\{i : L_i \geq b\}.$$

以下の期待値を計算するモンテカルロ法を行う．

$$\mathrm{E}_{\theta_\pm}\left[(K - \tilde{S}_m)^+ 1_{\{\max_{0\leq i\leq m}\tilde{S}_i \geq H\}} \times \exp((\theta_- - \theta_+)L_\tau - \theta_- L_m + m\psi(\theta_-))\right].$$

ここで $\mathrm{E}_{\theta_\pm}$ は，バリアに達するまでドリフト θ_+ を用い，バリアに達した後は，θ_- を用いてシミュレーションを行う期待値を意味する．この測度変換に対応して尤度比 $\exp((\theta_- - \theta_+)L_\tau - \theta_- L_m + m\psi(\theta_-))$ を乗じている．

補間法

一種の連続補正法である以下のような方法が提案されている [2]. 離散時刻モデル (3) で，$\tilde{S}_i, \tilde{S}_{i+1} < H$ であっても，連続時刻モデルでは区間 $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ の途中で，H を上回っている確率は 0 ではない．区間 $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ の両端で値を $\tilde{S}_i$, $\tilde{S}_{i+1}$ に固定した幾何ブラウン運動の最大値 $\tilde{M}_i$ は以下の分布をもつ．

$$\begin{aligned}&\Pr\{\tilde{M}_i \leq x | \tilde{S}_i, \tilde{S}_{i+1}\} = \\ &1 - \exp\left(-\frac{2(\log(x/\tilde{S}_i)(\log(x/\tilde{S}_{i+1}))}{\sigma^2\Delta t}\right) \\ &= \tilde{p}_i(x). \qquad (11)\end{aligned}$$

up-and-in put の利得関数は以下のように書くことができる．

$$(K - \tilde{S}_m)(1 - \prod_{i=0}^{m-1} 1_{\tilde{M}_i < H}). \qquad (12)$$

パス $(\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_m)$ を 1 つ決めたときのこの関数の条件付期待値は，

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[(K - \tilde{S}_m)\left(1 - \prod_{i=0}^{m-1} 1_{\tilde{M}_i < H}\right) | \tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_m\right] \\ = \;& (K - \tilde{S}_m)\left(1 - \prod_{i=0}^{m-1} \mathrm{E}[1_{\tilde{M}_i < H} | \tilde{S}_i, \tilde{S}_{i+1}]\right) \\ = \;& (K - \tilde{S}_m)(1 - \prod_{i=0}^{m-1} \tilde{p}_i(H)). \qquad (13)\end{aligned}$$

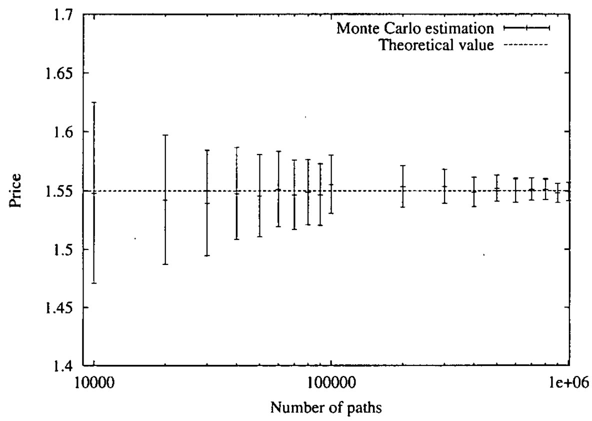

図 1: バリアを補正した離散時刻 up-and-in put オプション

2 行目は，$1_{\tilde{M}_i < H}$ が $\tilde{S}_i, \tilde{S}_{i+1}$ のみに依存することを使った．この方法では，パス $(\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_m)$ を発生させる毎に (13) を計算して，それらの平均を価格の推定値とする．

3．数値実験

図 1 は，up-and-in put オプションにおいてバリアを $He^{-\beta_1\sigma\sqrt{\Delta t}}$ に補正してから離散時刻のシミュレーションをしてみた結果である．パラメータ値は，$s = 100$, $K = 100$, $H = 105$, $m = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 0.2$ とした．理論値は 1.5501 である．理論値の求め方は [3] を参考にした．推定値に標準偏差の値を付して示した．この例では，バリアの補正によって離散時刻モデルの解が連続時刻モデルの解をよく近似しているようである．より詳細な数値実験の結果については，当日報告する．

References

[1] M. Broadie, P. Glasserman, and S.G. Kou, A continuity correction for discrete barrier options, *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp. 325–349, 1997.

[2] P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.

[3] P. Wilmott: *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, Wiley, 1998.