日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

低食い違い量列のランダム化とデリバティブ評価に現れる差異の要因

01308580 格付投資情報センター 田村勉 TAMURA Tsutomu

1. はじめに

デリバティブ評価において低食い違い量（low discrepancy）列を用いる場合,より合理的に結果を得るためには,ランダム化という手法を組み込むことが必要不可欠である.

代表的な低食い違い量列であるSobol' 列やFaure列は,その生成過程を共通の構造をした行列形式で表すことができる.ランダム化の1つの方法は,この行列に手を加えることであり,これにより異なる行列の組み合わせからいくつものパターンの点列生成が可能になる.ところが,デリバティブ評価へ適用すると往々にして不十分なことがある.

このような問題を踏まえ,本稿では,同様の行列表現から自然な拡張として得たSobol' 列とFaure列をつなぐ一般化点列を導入し,オプション評価に由来する数値積分を通して,各点列が実際に示す特徴を観察し検証する.その結果,行列によるランダム化は,点列間に一定の傾向をもつ格差をもたらし,このことから問題の原因となるある特性が点列に潜在することが判明した.またさらに改良を施し,より一般的な置換からランダム化を与えることが,その解決に有効であることを確認した.

2. 低食い違い量列に対するランダム化

評価モデルは何らかの形で確率変数をもっており,本来確定的な生成となる低食い違い量列にもある種のランダム性を与える必要がある.ランダム化を与える1つの手段として,乱数を用いることができる.Sobol' 列を基にした場合は方向数の初期値を,Faure列を基にした場合は生成行列の成分を,それぞれ乱数によって割り当てることが簡単な手法である.

乱数をいろいろ選ぶことにより,いくつものパターンの点列生成が可能になる.したがって複数の評価結果を得て,そこから追加的な検証が行える.このように乱数を用いるアイディアは,準モンテカルロ法における統計的な誤差評価を可能とした [1],[3].

ところが,これらのランダム化点列をデリバティブ評価へ適用した場合,その評価はほとんど同じ傾向を示しかつ往々にして不十分なことがある.例えば,ランダム化したFaure列については,そのような傾向が著しいことが確認され,より効率的に結果を得るためには,さらに一般化Niederreiter列による拡張をし,より一般的な置換を利用する必要があることがわかっている [4],[6].

3. Sobol' 列とFaure列を結ぶ一般化点列

Sobol' 列とFaure列の実際的な生成方法に着目すると,そこから自然な拡張として得られるSobol' 列とFaure列を含みかつ両者をつなぐ一般化点列を構築することが可能である.例えば,Sobol' 列の生成方法の拡張から次のように点列を構築することができる.

定義 点列$\mathbf{x}_n^I = \left(x_n^{I(1)}, x_n^{I(2)}, \cdots, x_n^{I(k)}\right), n = 0, 1, 2, \cdots$は次の手順で生成される. 素数$b$について有限体$GF(b)$上の$k$個の異なる既約多項式を用意し,そのうち第$i$次元に用いる多項式を

$$P_i(b, z) = z^p + c_1^{(i)} z^{p-1} + \cdots + c_{p-1}^{(i)} z + c_p^{(i)}$$

とすると,この係数を用いて$m_j^{(i)}, j = p+1, p+2, \cdots$は

$$m_j^{(i)} = b\left(-c_1^{(i)}\right) m_{j-1}^{(i)} \oplus_b b^2 \left(-c_2^{(i)}\right) m_{j-2}^{(i)} \oplus_b \cdots \oplus_b b^p \left(-c_p^{(i)}\right) m_{j-p}^{(i)} \oplus_b m_{j-p}^{(i)}$$

により順次生成される.ただし初期値として$m_j^{(i)}, j = 1, 2, \cdots, p$を$b^j$より小さくて$b$で割り切れない整数の中から任意で選ぶ. ここで$\oplus_b$は,整数の$b$進展開の桁ごとの$b$を法とした和を示す. このとき

$$v_j^{(i)} = \frac{m_j^{(i)}}{b^j}, j = 1, 2, \cdots$$

とする（Sobol' 列と同様に方向数と呼ぶことにする）とき,$x_n^{I(i)}$は整数$n = 0, 1, 2, \cdots$のb進展開のすべての非零桁jに対応する$v_j^{(i)}$を桁ごとにbを法とした和を適用することで得られる.

この定義は,Sobol' 列（b=2）とFaure列（素数$b \geq k$）を両極として含み,かつその中間的な構造を有した点列を表現することが可能となっている.したがって前述のSobol' 列の方向数やFaure列の生成行列に対するランダム化は,基本的に同じものを対象にしていることになる（以下、方向数という）.

4.　オプション評価を考慮した数値実験

オプションの価格評価に関連する数値実験を通して,既存の低食い違い量列：Sobol' 列と Faure 列および 3節で定義した方法により新たに構築した点列をランダム化し,実際のデリバティブ評価に基づく数値積分を通して,その特性を観察する.

ブラック・ショールズの仮定の下では,ヨーロピアン・プレイン・タイプや幾何平均タイプのオプションは,標準正規変量の和をもつ指数関数

$$\exp\left(w_0\sum_{i=1}^{k} w_i\epsilon_i\right)$$

の部分とそれ以外の定数部分との積という形で表すことができる.低食い違い量列あるいは乱数列が影響する部分は確率変数を含む上式であるから,具体的なオプション評価に代えて,被積分関数を上式の形式に簡略化し,係数 w_0 および $w_i, i=1,2,\cdots,k$ を変えることで各点列の特性を観察する.

まず,前節の定義に基づき,方向数の初期値を乱数により与えることでランダム化を取り込む点列（Sobol' 列と Faure 列を含む）を用いて数値実験を行う.各点列には,異なる乱数の組から異なる（方向数から成分を形成する）生成行列を与え,そこから得られる複数の推定結果に基づき検証を行う.ここでの数値実験からは,

- b が大きくなるほど収束性が劣る.またそのとき b のべき乗ごとに段階的に収束の水準が変化していく.

という特徴的な結果が得られた.

さらに,これらの点列に,一般化 Niederreiter 列を利用した拡張による置換構造を追加し,同様の検証を行うと,

- いずれの点列においても概ね収束性が改善する.前節で見られた b の大きさがもたらす収束性の悪さは解消される.

という結果が観察された.

これらの数値実験を踏まえ,点列の生成過程まで遡ることにする.方向数のみのランダム化とさらに付加的な置換構造によるランダム化の違いを探り,デリバティブ評価を左右する点列の特性を明らかにする.

5.　結論

以上の議論から次のような結論を得ることが出来た.

- 方向数によるランダム化点列の場合,次元が上がると特に b が大きい点列の収束性が悪くなる.それは複数次元が関係する評価を伴う場合に,生成当初に非常に偏ったサンプルを生み出すような構造をもっているからである.
- 後方置換を組み込むランダム化により,このような問題は解決され,各点列のパフォーマンス格差は狭まる.

なお,

- 今回 Sobol' 列と Faure 列の中間的構造をもつ点列群を取り上げた.これらは,構築に手間が掛かるため,実際的な使用では Sobol' 列や Faure 列に基づくランダム化点列となるであろう.しかし同じ構造を持ったより広範な点列群を使うことでより多様な検証を行うことができるのではないだろうか.

参考文献

[1] H.Morohoshi and M.Fushimi: A Practical Approach to the Error Estimation of Quasi-Monte Carlo Integrations. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1998* (Springer,2000) 377-390.

[2] S.Ninomiya and S.Tezuka: Toward Real-Time Pricing of Complex Financial Derivatives. *Appl. Math. Finance*, 3 (1996) 1-20.

[3] A.Owen: Monte Carlo Variance of Scrambled Net Quadrature. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.34, No.5 (1997) 1884-1910.

[4] 田村勉: オプション価格評価から見た低食い違い量列におけるランダム性の効果. *Journal of the Operations Research Society of Japan VOLUME 45, No.4 December 2002* (The Operations Research Society of Japan,2002) 435-456.

[5] T.Tamura: Low Discrepancy Sequences from the Point of View of Sample Paths and Randomization of Them. *2003年 JAFEE冬季大会予稿集* (日本金融・証券計量・工学学会,2003) 54-63.

[6] 田村勉,白川浩: 一般化 Faure 列による準乱数とそのオプション評価への応用. ジャフィー・ジャーナル *[1999]* 金融技術とリスク管理の展開 (東洋経済新報社,1999) 95-115.

[7] S.Tezuka: *Uniform Random Numbers: Theory and Practice* (Kluwer Academic Publishers, Boston,1995).