多次元アメリカン・オプションの確率メッシュ法によるプライシングの高速化

株式会社富士通総研　田嶋耕治　TAJIMA Koji

1　はじめに

多資産のアメリカン・オプションのプライシングのためのモンテカルロシミュレーション法について述べる。プライシング手法としては、ラティス法、analytic approximation、有限差分・有限要素法など種々の方法がある。ラティス法は、メモリのサイズや計算コストが、資産数に関して指数関数的に増大するので、3資産以上では実用的ではない。ラティス法の一般化と見なせる有限差分・有限要素法も同様である。モンテカルロ法によるアメリカン・オプションのプライシングは、計算量が大きいが、高次元、複雑なペイオフ関数、パス従属変数への一般化の柔軟性によってしばしば利用されている。

ここでは、Broadie and Glasserman (1997) による確率メッシュ法に low-discrepancy 列を適用した Boyle, Kolkiewicz, and Tan (2000) の手法に制御変量法を組み合わせて精度と計算速度を改善した結果 (Glasgow and Tajima, 2001) を報告する。

2　確率メッシュ法

Broadie and Glasserman (1997) による確率メッシュ法では、メッシュ点を増やすと推定量は真の値に収束する。またラティス法などと異なり、より多くの資産数と行使機会数を扱うことができる。

$d+1$ 個の離散的時刻で行使できる n 個の資産の価値に依存する証券に対するプライシング問題を設定する。$S_t = S_t^1, \ldots, S_t^n$ は $d+1$ 個の時刻 $\mathcal{T} = \{0 = t_0, \ldots, t_d = T\}$ で定義された初期状態 S_0 をもつ R^n の上のマルコフ過程を表す。アメリカン・オプションはペイオフ関数 $h(t, S_t)$ と満期 T で定義される。オプションが時刻 $\mathcal{T}$ で行使されると、プライシング問題は次式で定義される。

$$Q = \max_{\tau \in \mathcal{T}} E[h(\tau, S_\tau)] \quad (1)$$

τ は離散的値のみをとるので $i = d-1, \ldots, 0$ に対して次式のように書くことができる。

$$Q(t_i, x) = \max\left(h(t_i, x), E[Q(t_{i+1}, S_{i+1}) | S_i = x]\right) \quad (2)$$

ここで、$Q(T, x) = h(T, x)$ である。オプションの価格は $Q = Q(0, S_0)$ で与えられる。$Q(0, S_0)$ の近似は、状態空間 S_t を離散化して、離散メッシュ$X_t(j), j = 0, \cdots, b; i = 0, \cdots, d$ の上で解くことにより得られる。$X_t(j)$ 上の推定量を $\hat{Q}(t, X_t(j))$ で表すと、

$$\begin{aligned} \hat{Q}(T, X_T(j)) &= h(T, X_T(j)) \\ \hat{Q}(t_i, X_i(j)) &= \max\Big(h(t_i, X_i(j)), \\ &\quad E\Big[\hat{Q}(t_{i+1}, S_{t+1}) | S_i = X_i(j)\Big]\Big) \quad (3) \end{aligned}$$

となり、これを時間軸を逆方向に解くことにより、推定量が得られる。N 個のメッシュ$X^i, i = 1, \cdots, N$ を生成することにより、推定量 $\hat{Q}^i(0, S_0)$ が計算され、オプションのプライスの推定値が得られる。

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{Q}^i \quad (4)$$

計算量は $O(ndb^2)$ のオーダーであり、推定量の精度は b の大きさによって制御される。

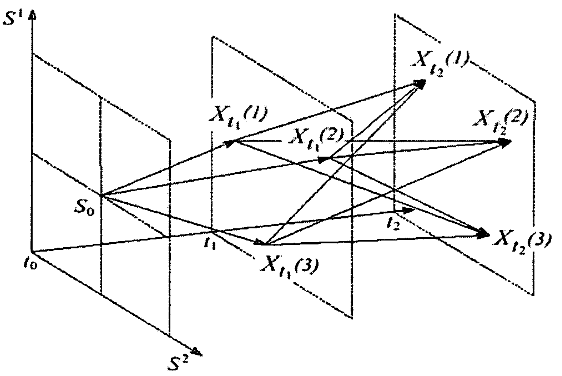

図 1:　資産数が 2 個 (S^1, S^2)、メッシュ点が 3 点 $(X_t(1), X_t(2), X_t(3))$ 、行使機会数が 2 時点 (t_1, t_2) の場合の確率メッシュの例 (Broadie and Glasserman(1997) に加筆)

3 Low-discrepancy メッシュ法

Boyle, Kolkiewicz and Tan (2000) は、low-discrepancy 列を確率メッシュ法に適用して収束性を高めている。(3) 式中の条件付期待値を求める際に必要となるメッシュ生成関数は、S_t の遷移密度関数の混合形となることから、直接 low-discrepancy 列に適用できないため、メッシュ生成関数を対数正規分布で近似している。n 次元の low-discrepancy 点を逆変換して多変量対数正規分布のサンプルを生成し、それらを用いてメッシュ点が生成される。

4 制御変量法

low-discrepancy メッシュ法の推定値の分散とバイアスを減少させるため、制御変量法 (Broadie and Glasserman, 1997) を用いることができる。inner 制御変量は、各メッシュ点で計算される条件付期待値に適用される。アメリカン・オプションと同じペイオフのヨーロピアン・オプションのプライスが利用される。さらに、アメリカン・オプションと相関をもつ outer 制御変量が、メッシュ推定量に対して適用される。

5 数値例

資産数が 3 で行使機会数が 21 の場合の、以下のペイオフ関数の幾何平均オプションの数値例を示す。

$$h(S^1, \cdots, S^n) = \max((S^1 \cdots S^n)^{\frac{1}{n}} - X, 0) \qquad (5)$$

表 1 のような原資産のパラメータを一様分布からラン

表 1: 原資産のパラメータ ($U[a,b]$ は一様分布)

パラメータ	値
初期価格 (S_0)	U[80,120]
行使価格 (X)	100
ボラティリティ	U[0.1, 0.5]
リスク中立金利	U[0.01, 0.05]
配当イールド	U[0.05, 0.12]
満期 (T)	$U[\frac{1}{12}, 4]$

ダムに生成して得られる 10 個のオプションについて、7 通りのメッシュノード数 (64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096) に対して、本手法による推定値と、バイノミアル法で計算される真値との二乗平均誤差を計算した結果を図 2 に示す。low-discrepancy 列としては Sobol 列を用いた。確率メッシュ法、low-discrepancy 列、制御変量法を組み合わせることにより、従来法よりも良い精度と収束性が得られた。

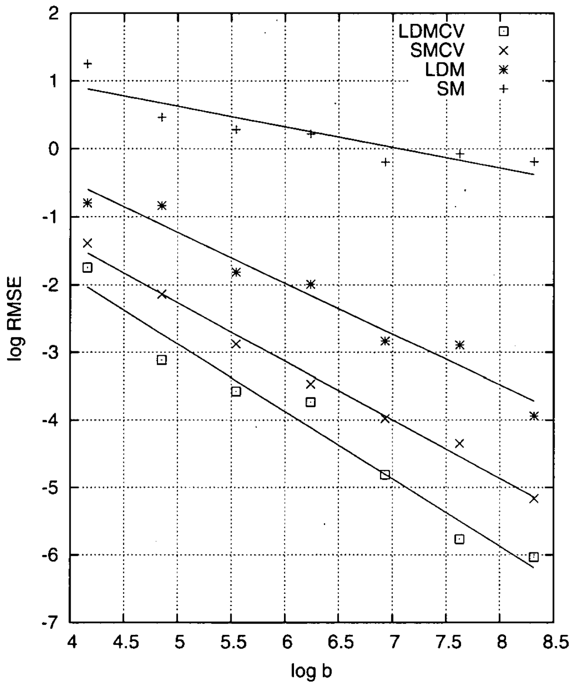

図 2: 二乗平均誤差とノード数 (確率メッシュ法 (SM)、確率メッシュ法と制御変量法 (SMCV)、low-discrepancy メッシュ法 (LDM)、本方法 (LDMCV))

参考文献

[1] Boyle, Kolkiewicz, and Tan (2000), "Pricing American Style Options Using Low Discrepancy Mesh Methods", University of Waterloo.

[2] Broadie and Glasserman (1997), "A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options", Columbia University.

[3] Glasgow and Tajima (2001), "A Low Discrepancy Mesh Method with Variance Reduction for Pricing American-style Multi-dimensional Options", Fujitsu European Centre for Information Technology Limited (現 Fujitsu Laboratories of Europe Ltd), Middlesex, UK.