日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

契約者持分の増加と契約の転換を考慮した企業年金保険の価格付け

01207991 北海道大学大学院 経済学研究科 鈴木輝好 TERUYOSHI Suzuki

1 はじめに

本論文では，企業年金保険における年金基金の最適な解約戦略と生命保険会社の最適な転換戦略が相互に依存しあうことを考慮に入れて企業年金保険の価格付けを行い，その解析解を導出した．その際，生命保険会社には資産運用が悪化した場合に，またその時にのみデフォルトリスクがあること，さらには，企業年金保険の額面が利率の最低保証と成果配当により単調に増加することをモデル化した．

2 モデル

一般勘定資産 $X(t)$ はリスク中立測度 P の下で確率過程

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dB(t), X(0) = x \quad (1)$$

に従うとする．ここで，最低保証利率 C は額面価格 $Y(t)$ に対して保証される利回りとし，連続的に支払われるとする．また，成果配当は一般勘定資産価格 $X(t)$ が額面価格 $Y(t)$ を上回っているときにのみ $\delta X(t)$ だけ連続的に支払われるとする．すると，企業年金保険の額面価格 $Y(t)$ は次の式

$$Y(t) = y + \int_0^t \delta X(u) 1_{\{X(u)>Y(u)\}} du + \int_0^t CY(u)du \quad (2)$$

で表すことができる．ただし $Y(0) = y$. 次に，年金基金の受け取るペイオフを原因別に (i) 解約，(ii) 保険会社のデフォルト,(iii) 転換の３つに分けてモデル化する．

第一に，企業年金保険には満期が無くまたいつでも解約できるとする．ただし，$X(t) \le Y(t)$ における解約では，基金は解約控除率を α として解約控除金 $\alpha(Y(t) - X(t))$ を支払い，額面 $Y(t)$ の保証を受けるものとする．また，解約控除金の上限を $\rho Y(t)$ とする．結局，解約時点における基金のペイオフは

$$W_s(x,y) = \begin{cases} y & y < x \\ (1-\alpha)y + \alpha x & \frac{\alpha-\rho}{\alpha} y < x \le y \\ (1-\rho)y & x \le \frac{\alpha-\rho}{\alpha} y \end{cases} \quad (3)$$

となる．第二に，生命保険会社のデフォルト時に受け取るペイオフをモデル化する．生命保険会社のデフォルト時刻を確率変数 τ で表しパラメータ $\lambda(X(t), Y(t))$ のポアソン分布に従うと仮定する．ここで，生命保険会社のデフォルトは一般勘定資産が良い状態であるときには発生せず，運用が悪化しているときに発生しやすいことを考慮し，

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 0 & x \ge y \\ h & x < y \end{cases} \quad (4)$$

とする．ただし，企業年金保険のデフォルト時点における損失率を ℓ とする．このとき，デフォルト時におけるペイオフは

$$W_d(x,y) = (1-\ell)W_s(x,y) \quad (5)$$

と表される．第三に，本論文では，一般勘定資産が額面価格を上回っているときには，生命保険会社は契約の転換を促すことがあり，年金基金もこれを受け入れるものと仮定する．このときのペイオフを割り増し率 β を用いて

$$W_c(x,y) = 1_{\{x>y\}}(1+\beta)y \quad (6)$$

と表す．また，転換は生命保険会社による最適行動の結果としてモデル化する．

さて，ここで年金基金による最適解約戦略と生命保険会社による最適転換戦略について考えると，両者は独立には決定できないことが分かる．なぜならば，解約権が行使されると転換権は消失し，またその逆も成立するからである．すなわち，年金基金の持つオプションと生命保険会社が持つオプションは分離して計算することができない．よって，企業年金保険の解約時刻を η_1，転換時刻を η_2 とすると，企業年金保険の価格 $w(x,y)$ が存在するならば

$$\begin{aligned}\phi(\eta_1,\eta_2) \quad = \quad E\Big[& 1_{\{\tau<\eta_1,\eta_2\}} W_d(X(\tau),Y(\tau)) \\ & +1_{\{\eta_1<\tau,\eta_2\}} W_s(X(\eta_1),Y(\eta_1)) \\ & +1_{\{\eta_2\le\tau,\eta_1\}} W_d(X(\eta_2),Y(\eta_2)) \Big]\end{aligned}$$

として，

$$w(x,y)=\max_{\eta_1}\min_{\eta_2}\phi(\eta_1,\eta_2)=\min_{\eta_2}\max_{\eta_1}\phi(\eta_1,\eta_2)$$

が成立していなくてはならない．これは年金基金の解約戦略と生命保険会社の転換戦略の同時決定問題である．また，互いの権利行使が相手のオプションを消失させるアメリカンタイプの無期限平均値オプションの価格付け問題と捉えることが可能である．

結局，この問題は，次の常微分方程式問題に書き換えることができる．

$$\frac{1}{2}x^2w_{xx}+rxw_x+\left(\delta x1_{\{x\geq y\}}+Cy\right)w_y \\ -\left(h\ell 1_{\{x<y\}}+r\right)w=0.$$

ただし，境界条件は，

$$x<y \quad \text{のとき} \quad w(x,y)\geq W(x,y) \tag{7}$$

$$x\geq y \quad \text{のとき} \quad w(x,y)\leq W(x,y) \tag{8}$$

により与えられる．ここで $(\bar{x},\bar{y})$ は自由境界であり，また，

$$W(x,y)=\begin{cases}(1+\beta)y & y<x\\ (1-\alpha)y+\alpha x & \frac{\alpha-\rho}{\alpha}y<x\leq y\\ (1-\rho)y & x\leq\frac{\alpha-\rho}{\alpha}y\end{cases} \tag{9}$$

とする．最終的に，年金基金の最適解約戦略と生命保険会社の最適転換戦略の同時決定問題は，2つの smooth pasting condition が同時に成立することに帰着し，次の命題が導出される．

命題 1 一般勘定資産の価格が式 (1) に，またそのときの額面価格が式 (2) に従うとする．また成果配当率を δ とし，さらに最低保証利率を C, 解約控除金を $\alpha(y-x)$，解約控除金の上限を ρy，転換による割増償還額を $(1+\beta)y$ とする企業年金保険の価格は

$$w(x,y)\\ =\begin{cases}\dfrac{(1+\beta)x}{U^2}\left(U-\displaystyle\int_{x/y}^{U}e^{a(z-u)}\left(\frac{z}{U}\right)^{1+b}dz\right), & x\geq y\\[2ex] y\Gamma(\theta_1,\theta_2,L)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta_1}+y\Gamma(\theta_2,\theta_1,L)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta_2}, & x<y\end{cases}$$

により与えられる．ただし，U,L は式

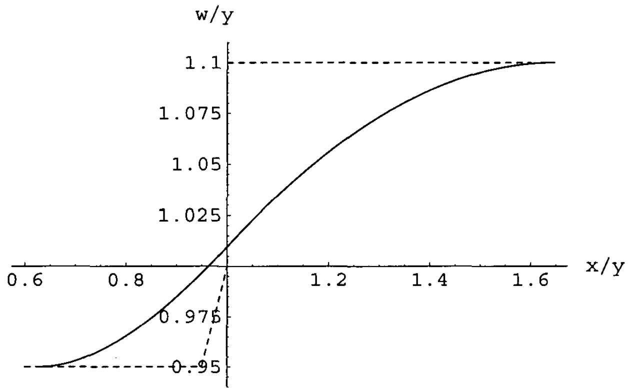
$$\begin{cases}-\dfrac{1+\beta}{U^2}\left(U+\displaystyle\int_1^U e^{a(z-U)}\left(\frac{z}{U}\right)^{1+b}dz\right)\\ \qquad =\Gamma(\theta_1,\theta_2,L)+\Gamma(\theta_2,\theta_1,L)\\[2ex] -(1+\beta)e^{a(1-U)}U^{-b-2}\\ \qquad =(\theta_1-1)\Gamma(\theta_1,\theta_2,L)+(\theta_2-1)\Gamma(\theta_2,\theta_1,L)\end{cases}$$

を満たす．ここで，$a=2\delta/\sigma^2, b=2(C-r-\sigma^2)/\sigma^2, z_0=(\alpha-\rho)/\alpha$，

$$\Gamma(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(1-\rho)y}{(y-x)z^x}, & L<z_0\\[2ex] \dfrac{\alpha L(y-1)+(1-\alpha)y}{(y-x)z^x}, & L\geq z_0\end{cases} \tag{10}$$

とし，また，θ_1,θ_2 は式 $\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta-(r+h)=0$ の根で与えられる．(証明略)

適当なパラメータ設定の下，図に $w(x,y)/y$ を描いた．



点線は $W(x,y)/y$ を表す．最適解約は $L=0.63$ において，最適転換は $U=1.64$ において起きる．パラメータは次の通り．$\delta=0.02,\sigma=0.2,r=0.05,\rho=0.05,\beta=0.1,h=0.001,L=0.7,\alpha=1$.

参考文献

[1] Grosen, A and P. L. Jorgensen (2000), "Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options, and bounus policies," *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, pp.37-57.

[2] Rogers, L. C. G. and Z. Shi (1995), "The value of Asian option," *Journal of Applied Probability*, **32**, pp.1077-1088.

[3] Shepp, L. and A. N. Shiryaev (1993), "The Russian option: reduced regret," *Annals of Applied Probability*, **3**, pp.631-640.