日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

AR(1)プロセスを用いたLocal Searchに対する確率的解析

01107771 小樽商科大学 加地太一 KAJI Taichi

1 はじめに

メタヒューリスティックスの特性を検討する一つの方法として確率的解析がある。すなわち、得られる解の値、および要求されるステップ数などを確率的に推定する分析方法である。その一つの研究として、Eikelder 等 [1] は巡回セールスマン問題 (TSP) を対象として Local Search によって得られる解の値、および要求される反復数の理論的な期待値を検討している。そこでは解 x_0 がコスト c_0 をもつときその近傍のすべてが与えられたコスト c より大である確率（ステップ確率）を必要としている。これを求めるのに Eikelder 等は TSP の限定した近傍構造に対して問題独自に導出している。したがって、TSP に対する通常の近傍、あるいはその他の組合せ最適化問題では単純に利用することが困難となる。そこで、本研究では上記のステップ確率を導出するため、解構造が AR(1) モデルにしたがっているという仮定のもとそのステップ確率を導出する方法を検討し、その有効性を確かめる。それにより、TSP に対する任意の近傍、あるいはその他多くの組合せ最適化問題の Local Search への確率的解析が可能となるものと考える。

2 Eikelderによる確率的解析

本研究においても Eikelder の解析手法は重要なフレームワークとなる。そこで、本章では本研究で利用する Eikelder のモデリングの概要を説明する。まず、ある確率分布に従った問題の解空間を設定する。すなわち、解 x のコストを確率変数 $\underline{f}(x)$ とし考え、$\underline{f}(x)$ は平均 m、分散 σ^2 の正規分布 $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ となる確率空間の上で Local Search のアベレージケースの分析を行う。この解空間モデルの設定は確率的解析における共通したアプローチでもある。また、任意の解 x の近傍を $x_1,\cdots,x_b$ とすると、その大きさは $b=|N(x)|$ となる。次に、重要な確率として以下のステップ確率がある。この確率によって我々が求めたい統計量がすべて求まることとなる。

$$g(c_0,c)=Pr\{_{\forall i\in\{1,\ldots,b\}}\underline{f}(x_i)>c\mid \underline{f}(x_0)=c_0\} \quad (1)$$

これは解 x_0 がコスト c_0 を持つとき、その近傍のすべてがコスト c より大である確率を示す。さらに、このステップ確率を用いて、コスト c_0 の解からコスト c の解へ移動する確率密度が以下の式で導出される。

$$P(c_0,c)=\frac{-\frac{\partial}{\partial c}g(c_0,c)}{1-g(c_0,c_0)} \quad (2)$$

さらに、高々$k+1$ 回のステップでコスト c の局所解に達する密度関数 $\rho_{k+1}(c)$ と、k ステップまで局所解に達せず、$k+1$ ステップでコスト c となる密度関数 $\eta_{k+1}(c)$ は以下の再帰式で求まるであろう。

$$\rho_{k+1}(c)=\rho_k(c)+g(c,c)\eta_k(c) \quad (3)$$

$$\eta_{k+1}(c)=\int_c^{\infty}\eta_k(c_0)(1-g(c_0,c_0))P(c_0,c)dc_0 \quad (4)$$

これらより、最終解の局所解密度が

$$\rho_{fin}=\lim_{k\to\infty}\rho_k \quad (5)$$

で計算される。ただし、$\lim_{k\to\infty}\eta_k=0$ であり上式は収束され一定の値に近ずく。最後に、局所解に達するステップ数を確率変数 $\underline{steps}$ と捉えれば、

$$Pr\{\underline{steps}=k\}=\int_{-\infty}^{\infty}g(c,c)\eta_{k-1}(c)dc \quad (6)$$

となる。

3 AR(1)プロセスによる解空間の解析

問題はステップ確率 (1) 式を導出することに帰着される。この値が求まることにより、得られる解の値、および要求される反復数の確率分布が求まることとなる。このステップ確率導出のキーポイントとして、2つの相関係数を知ることが重要な課題となる。一つは解 x_0 とその近傍解との相関係数であり、もう一つは解 x_0 の近傍内の解同士の相関係数である。Eikelder 等はこの値を求めるために、2-OPT 近傍の限定版モデルを設定し、そのモデルの上で上記の2つの値を導出した。しかし、通常の 2-OPT 近傍、および他の組合せ最適化問題での利用は不可能である。そこで、我々は AR(1) プロセスの考え方を利用し、上記の値を導出しステップ確率をもとめる方法について検討した。また、[4] では近傍空間における解同士を独立と仮定したが、今回は強く相関が働くものとして確率的な解析を行っている。

AR(1) というのは確率過程における時系列上で以下の式に従うプロセスのことをいう。

$$X_t=z_LX_{t-1}+N_t \quad (7)$$

次に、任意の解 x に対してその評価値 (コスト) を $f(x)$ とする。組合せ最適化問題のランドスケープは写像 $f:x\mapsto f(x)$ によって定義される。このランドスケープ上のランダムウォーク $\{x_i\}$ による評価値の確率的な時系列は以下の式で表され、AR(1) プロセスに従うものと

考えられる。この性質が多くの組合せ最適化問題の解空間に見られ、統計的な性質を導き出すことを可能とする[3]。

$$\underline{f}(x_k) = \rho(1)[\underline{f}(x_{k-1}) - m] + m + \Delta \quad (8)$$

ここで、Δ はある平均と分散を持った White Noise であり、$\rho(r)$ は自己相関関数である。AR(1) プロセスの特徴として以下の式のように自己相関関数はステップ数 r の増加によって 0 へ指数関数的な減衰を示す。

$$\rho(r) = \rho(1)^{|r|},\ r = 0, \pm1, \pm2, \cdots \quad (9)$$

この性質が確認されたならば、解空間の評価値ランドスケープが AR(1) プロセスに従っていると判断できうる。また、時系列が AR(1) プロセスであり、かつ $\rho < 1$ ならば、そのプロセスは定常過程となることが知られている。定常過程において自己共分散は

$$R(r) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-r}(\underline{f}(x_t) - E[\underline{f}(x_t)])(\underline{f}(x_{t+r}) - E[\underline{f}(x_{t+r})]) \quad (10)$$

で見積もり可能となる [2]。したがって、1ステップの自己相関関数は $\rho(1) = R(1)/R(0)$ となる。この値は x_0 とその近傍との相関係数 ρ と同値である。また、x_0 の任意の2つの近傍間の相関係数 ν は、近傍同士の共通する属性の比率が高いことから、近似的に ρ に近い定数と仮定する。このように、AR(1) プロセスの考えに基づき、汎用的にステップ確率の導出に必要な値を推定することが可能となる。ただし、本稿ではステップ確率の計算式、および導出過程は省略する。

4 グラフ分割問題に対する数値実験

本研究では AR(1) プロセスによる解析法の汎用的な有用性を確かめるため、TSP と異なる組合せ最適化問題を用い検証を行ってみる。ここでは2分割のグラフ分割問題に対して検討を行う。近傍構造は分割された集合の間で頂点を交換する”2頂点交換近傍”を採用する。これによって、提案手法の有用性を確かめたい。まず、グラフ分割問題の解空間が AR(1) プロセスにしたがっているかを確かめるため、頂点数 500 のランダムグラフに対する自己相関関数の振る舞いを調べる。図1はその結果であり、破線が理論的な自己相関関数を示し、実線がサンプルに基づいた自己相関関数を示す。結果として、指数関数的な減衰性が認められその空間は AR(1) プロセスに従っているといってよいであろう。したがって、提案方法による解析を行うことが可能となる。図2は提案するアイディアにより計算された、最終解のコストの確率密度が示されている。対応する問題を local Search で解いてみた結果、ほぼそれに近似する値が得られ、モデルの有効性が示された。

5 おわりに

本研究では、Local Search に対する多くの組合せ問題、多様な近傍構造に対応できうる確率的解析モデルを提案した。そこでは、組合せ最適化問題の解構造では AR(1) プロセスに従う性質が存在することにより、本研究で必要な統計量を導出することがアイディアの中心となる。また、そのモデルの汎用性を確かめるために、グラフ分割問題を例にとり数値実験を行い検討している。いくつかの数値実験結果より提案モデルの妥当性が示されるものと考える。

参考文献

[1] Eikelder, H.M.M., Verhoeven, M.G.A., Vossen, T.W.M. and Aarts, E.H.L., "A Probabilistic Analysis of Local Search", in Meta-Heuristics: Theory & Applications, ed. Osman, I.O. and Kelly, J.P., Kluwer Academic Publishers, pp.605-618, 1996.

[2] Priestley, M.B., "Spectral Analysis and Time Series", Academic Press, 1981.

[3] Weinberger, E., "Correlated and Uncorrelated Fitness Landscapes and How to Tell the Difference", Biological Cybernetics, Vol.63, pp.325-336, 1990.

[4] 加地, Local Search の確率的解析による性能評価, 商学討究（小樽商科大学）, 第 51 巻, 第 4 号,pp.193-211,2001.

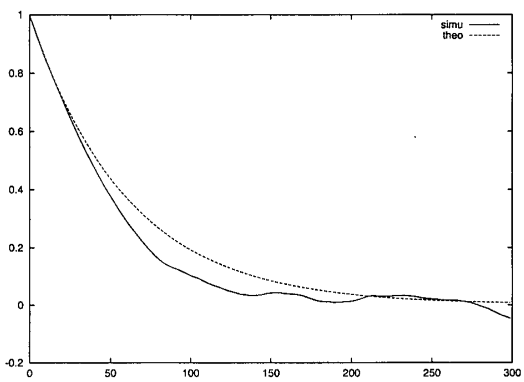

図 1: 自己相関関数の振る舞い

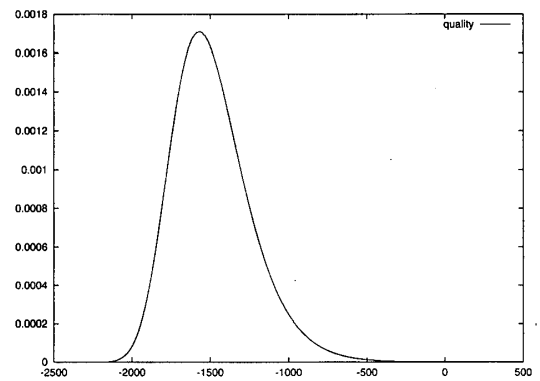

図 2: 求まる解の値の確率密度