日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

MAX-2-SATに対する分枝限定法

02104164 京都大学 *古賀 祐一 KOGA Yuichi
01704164 京都大学 柳浦 睦憲 YAGIURA Mutsunori
01405524 京都大学 野々部 宏司 NONOBE Koji
01001374 関西学院大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 はじめに

MAX-2-SATは，与えられた n 変数 m 節に対して，充足節の重みの和を最大 (すなわち非充足節の重み和を最小) にする変数の割当を求めるという最大充足可能性問題 (MAX-SAT) において，各節のサイズを2以下に限定した問題をいう．やはりNP困難であることが知られている．MAX-2-SATに対しては，これまでに様々な近似解法が提案されてきたが，近年では，分枝限定法を中心とする厳密解法についても関心が集まっている．

従来の研究では，非充足節の重み和に対する下界値の優れた計算方法がなく，多くの分枝操作を行って探索木を展開せざるをえなかった．本研究では，下界値を求める新しいアルゴリズムを提案する．このアルゴリズムは，同時に充足できない節の集合を2-SATのアルゴリズム [1] に基づいて特定し，それらの節の重みの最小値を下界値に加算するという考え方に基づく．この方法により，従来の方法に比べて，分枝限定法における探索木の節点数を大幅に減らすことに成功し，計算時間を短縮できることを計算実験によって確認した．

2 問題定義

0-1変数 x_j とその否定 $\bar{x}_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ を総称してリテラルと呼び，いくつかのリテラルの論理和を節と呼ぶ．MAX-2-SATでは節に含まれるリテラルの数は高々2である．1つのリテラルからなる節を特に単一リテラル節と呼ぶ．

n 変数の値のある割当に対して，節 C_i の論理式の値が1となる時，その割当は節 C_i を充足するという．また，各節 C_i には正の重み w_i が与えられている．m 個の節の集合を $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\ldots,C_m\}$，重みベクトルを $w=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ と記すと，MAX-2-SATは以下のように定式化される．

MAX-2-SAT

入力: n 変数よりなる m 個の節 $\mathcal{C}$ とその重みベクトル w

出力: 非充足節の重み和を最小にする n 変数への0-1割当

3 分枝限定法

分枝限定法では，一部の変数の0-1割当を固定することで元の問題を再帰的に部分問題に分割し，そのすべてを解くことで等価的に元の問題を解く．アルゴリズムの様子は探索木で表され，各節点は部分問題を表す．以下では，k 番目に生成された節点を P_k と記す $(k=1,2,\ldots)$．

分枝限定法では，各部分問題に対して，下界値テストを行う．下界値テストとは，

$LB(P_k)=P_k$ の非充足節の重み和の下界値
$UB=$ 暫定解における非充足節の重み和

に対して，$UB \le LB(P_k)$ ならば部分問題 P_k を終端できるというものである．なお，暫定解は，探索中に得られた最良の解を示す．

UB については，任意の解の目的関数値が最適値の上界となるため，まず最初に，局所探索法を用いて近似解を求め，その目的関数値を上界の初期値とした．これにより，分枝限定法の初期の段階から下界値テストの効果を上げることができる．

3.1 下界値 $LB(P_k)$ の新しい計算法

まず，準備として，含意 $\Rightarrow$ について述べる．含意とは，a ならば b ということを示す論理式であり，リテラル a と b からなる節 $(a \vee b)$ は，$\bar{a} \Rightarrow b$ と $\bar{b} \Rightarrow a$ という2つの含意と等価になる．

次に，与えられた m 個の節 $\mathcal{C}$ に対して一つのグラフを定義する．まず，リテラル $x_j, \bar{x}_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ に対応する $2n$ 個の節点を用意し，各節 $(a \vee b)$ に対応して，$(\bar{a},b)$ と $(\bar{b},a)$ の2つの有向辺を張る (これら2本の辺について，一方の辺を他方の辺の双対な辺と呼ぶ)．これらの辺は，$\bar{a} \Rightarrow b$ と $\bar{b} \Rightarrow a$ に対応している．単一リテラル節 c に対しては，辺 $(\bar{c},c)$ を張る．各辺には対応する節の重みを与える．

このグラフには以下の重要な性質がある．ある変数 x に対して，x と $\bar{x}$ を含む閉路が存在する場合，その閉路を構成する辺に対応する節の全てを同時に充足することはできないというものである．以下，このような閉路を矛盾閉路と呼ぶ．

グラフ中に矛盾閉路が存在するとき，その中に少なくとも一つ充足できない節が存在する．その節の重みは，矛盾閉路を構成する辺の重みの最小値以

上である．矛盾閉路が複数個存在する場合には，その閉路上の各辺 (およびその双対辺) の重みから閉路上の最小重みを減じる (重みが 0 になった辺はグラフから消去する) という操作を反復適用すれば，引かれた最小重みの和を下界値 $LB(P_k)$ として利用できる．本研究では，このアイデアに基づいて，辺の本数が少ない矛盾閉路を見つけては，その最小重みを加算することで下界値を得ている．

3.2 下界値計算の改良

MAX-2-SAT に対して作られたグラフでは非充足節が存在することと矛盾閉路が存在することは同値である．このことから，MAX-2-SAT は，対応するグラフから辺を抜く (双対な辺も同時に抜く) ことで存在する全ての矛盾閉路を消去するとき，抜く辺の重みの和を最小化する問題と解釈できる．この考え方に基づくと，MAX-2-SAT は，閉路を要素，節を要素集合に対応させて，集合被覆問題として記述できる．

このアイデアによって MAX-2-SAT を厳密に解くためには，矛盾閉路を全て列挙する必要があるが，閉路数は指数オーダーになり得るため，現実的でない．また，集合被覆問題も NP 困難である．一方，矛盾閉路の一部に基づいて定義した集合被覆問題の最適値は，非充足節の重み和に対する下界を与える．そこで，一部の矛盾閉路に基づく集合被覆問題の線形計画緩和問題を解くことにし，閉路は Gilmore と Gomory の列生成法 [3] と同様のアイデアに基づいて，線形計画緩和による下界値を改善するのに必要なもののみを逐次追加するという方法を採った．

4 計算実験

計算実験は，PC (PentiumIII 1GHz, 1GB memory) 上で C 言語を用いて行った．用いた問題例は，Borchers と Furman によるベンチマーク問題の一部である [2]．これらの問題例では変数の数が全て 100 で，重みが全て 1 となっている．以下では，3.1 節の下界値計算法を用いた分枝限定法のアルゴリズムを BB_G と記し，3.2 節の下界値計算法を用いた分枝限定法のアルゴリズムを BB_S と記す．

文献 [4] (ZSM と記す) および CPLEX9.0 (CPLEX と記す) を比較対象として計算実験を行った．ZSM は従来の分枝限定法のアルゴリズムであり，CPLEX は整数計画法に基づく分枝限定法の汎用アルゴリズムである．ZSM と CPLEX の実験環境は，提案手法の実験に用いた計算機より 2，3 倍程度速い．

表 1 に結果を示す．この表において，m は問題例の節数である．また，node は分枝限定法の探索木の節点数，time は計算時間で，単位は秒である．

表 1: 実験結果

	ZSM	CPLEX		BB_G		BB_S	
m	time	node	time	node	time	node	time
200	0.53	5	0.04	1	0.28	1	1.52
300	7.67	148	0.18	115	1.04	1	2.17
400	172	4179	2.90	211	3.19	5	14.72
500		57689	47.3	2959	61.4	31	200.46
600		1029295	1055	10921	266	115	1583.28

まず，BB_G において，探索木の節点数は CPLEX に比べて大幅に減少しており，計算時間においても，実験環境の差を考慮に入れると，他の 3 手法より大幅に優れていることが分かる．

一方，BB_S では，探索木の節点数が他のどの手法よりも少ない．計算時間については，実験環境の差を考慮に入れると，m が小さい問題に対しては，ZSM より優れており，CPLEX よりやや劣る．しかし，$m = 600$ の大規模な問題例に関しては，BB_S が優れている．

5 まとめ

本研究では，MAX-2-SAT において，分枝限定法による厳密解法を構成し，その中で，グラフを用いて非充足節の重みの下界値を求める 2 つの方法を提案した．代表的なベンチマーク問題に対する計算実験の結果，探索木の節点数を大幅に減らすことができ，また，計算時間においても従来の方法より短い時間で計算が終了することを確認できた．

参考文献

[1] B. Aspvall, M. R. Plass, and R. E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, Vol. 8, pp. 121–123, 1979.

[2] B. Borchers and J. Furman. A two-phase exact algorithm for MAX-SAT and weighted MAX-SAT problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol. 2, pp. 299–306, 1999.

[3] P. C. Gilmore and R. E. Gomory. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, Vol. 9, pp. 849–859, 1961.

[4] H. Zhang, H. Shen, and F. Manya. Exact algorithms for MAX-SAT. In I. Dahn and L. Vigneron, editors, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 86. Elsevier, 2003.