

施設配置問題に対する近似アルゴリズムの実験評価

02402220 中央大学大学院 *中塩 英良 NAKASHIO Hidekazu
01006870 中央大学 浅野 孝夫 ASANO Takao

1 はじめに

本論文では、施設配置問題の1つである容量制約のある施設配置問題(ソフト容量版)に対して、Mahdian, Ye, Zhang [2] が提案した 2.89 近似アルゴリズムと、現在もっとも近似比率の良い、Mahdian, Ye, Zhang [3] が提案した 2 近似アルゴリズムについて概観する。またこの2つの近似アルゴリズムは、容量制約のある施設配置問題(ソフト容量版)を容量制約のない施設配置問題に帰着させることによって得られるものである。容量制約のない施設配置問題の近似アルゴリズムである 1.61 近似アルゴリズム [1] についても触れることにする。そして最後に、2つの近似アルゴリズムの計算機実験を行うことで、実際的な性能評価を比較、検討する。

2 問題定義

施設配置問題は、入力として n_f 個の開設候補の施設集合 F と n_c 人の利用者集合 C が与えられる。施設 i には施設を開設するための非負の開設コスト f_i が与えられ、施設 i と利用者 j との間には非負の接続コスト c_{ij} が与えられる。この入力において、いくつかの施設を開設し、すべての利用者を開設した施設に接続することを考える。そのため目的は、総コスト(開設コストと接続コストの合計)が最小になるような施設の開設と接続を求めることである。

さらに、容量制約のある施設配置問題では、施設配置問題の入力において、各施設 i に整数 u_i が付随している。基本的には施設 i は u_i 人の利用者しかサービスができないという条件が加わる。ソフト容量版では、各施設が何回でも開設可能である。

この問題は、容量制約のない施設配置問題と同様、以下のように整数計画問題として定式化できる。

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad (j \in C), \\ & x_{ij} \leq y_i \quad (i \in F, j \in C), \\ & \sum_{j \in C} x_{ij} \leq u_i y_i \quad (i \in F), \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i \in F, j \in C), \\ & y_i \text{ は非負の整数} \quad (i \in F). \end{aligned}$$

この整数計画問題を多項式時間で解くのは困難であるため、線形計画問題(LP)に緩和する。

施設配置問題に対する最適解のコストを OPT (開設コスト F^* , 接続コスト C^*) としたとき、アルゴリズムにより求まる解のコストが高々 $\gamma_f F^* + \gamma_c C^*$ なら、このアルゴリズムを (γ_f, γ_c) 近似アルゴリズムと呼ぶことにする。Jain, Mahdian, Saberi [1] で提案された 1.61 近似アルゴリズムは、容量制約のない施設配置問題や線形コスト施設配置問題を解くための近似アルゴリズムであるが、(1.11, 1.78) 近似、(1, 2) 近似アルゴリズムであることも証明されている。

3 2.89 近似アルゴリズム [2]

このアルゴリズムは容量制約のない施設配置問題に帰着させて、 (γ_f, γ_c) 近似アルゴリズムを用いている。近似比率は $\gamma_f + \gamma_c$ となることが証明できる。

1. 施設 i を開設するための開設コストを $(1 - \lambda)f_i$, 施設 i と利用者 j を接続するための接続コストを $c_{ij} + \lambda_i \cdot \frac{f_i}{u_i}$ とする容量制約のない施設配置問題の入力を構築する。
2. 1 で作られた入力において、スケーリングパラメータを γ_c/γ_f とする。このとき、開設コストを一様に γ_c/γ_f 倍する。
3. 上記の入力に対して、 (γ_f, γ_c) 近似アルゴリズムを適用する。
4. 結果を、各施設 $i \in F$ に対して $[(\sum_{j \in C} x_{ij})/u_i]$ 回施設を開設した容量制約のある施設配置問題の解として出力する。

1.61 近似アルゴリズムは (1.11, 1.78) 近似アルゴリズムであるので、このアルゴリズムの近似比率は 2.89 となる。

4 2 近似アルゴリズム [3]

このアルゴリズムは、まず容量制約のある施設配置問題(ソフト容量版)を線形コスト施設配置問題に帰着させ、さらに容量制約のない施設配置問題に帰着させて、 (γ_f, γ_c) 近似アルゴリズムを用いている。

容量制約のある施設配置問題の入力に対して、線形コスト施設配置問題の入力を構築するために、 k 人の利用者に接続する施設 i のコストを、

$$f_i(k) = \begin{cases} 0 & (k = 0) \\ (1 + \frac{k-1}{u_i})f_i & (k \geq 1) \end{cases}$$

と変更する。このとき注意しなければならないことは、 $k \geq 1$ に対して、

$$\left\lfloor \frac{k}{u_i} \right\rfloor \leq 1 + \frac{k-1}{u_i} \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{k}{u_i} \right\rfloor$$

となることである。したがって、開設コストのズレが2近似以内で収まっているので、この帰着が(2,1)-リダクションであることがわかる。また、線形コスト施設配置問題に対して(1,2)近似アルゴリズム(1.61近似アルゴリズム)が存在するので、2近似アルゴリズムとなる。

5 計算機実験

2.89近似, 2近似アルゴリズムを Visual C++ で用いて実装し, 計算機実験を行うことで実際的な性能評価を行う。最適解としては, IP を線形計画ソフト NUOPT で解くことで得られる整数解を用いることにする。入力データは,

標準入力データ

- 施設は, 整数格子点の座標 (0, 0) から (500, 500) の間でランダムに 80 個ずつ発生
- 利用者は, 整数格子点の座標 (0, 0) から (500, 500) の間でランダムに 100 個ずつ発生
- 開設コストは, 1 から 1000 の間のランダムな正整数
- 施設の容量は, 1 から 80 の間のランダムな正整数
- 施設と利用者の接続コストは, 施設と利用者のユークリッド距離

としたものを用い, この入力データの一部を変更することで様々な実験を行う。

入力に対する 2.89 近似アルゴリズムの出力を図 1 に, 2 近似アルゴリズムの出力を図 2 に示す。なおこれらの図において, ● は利用者を表し, □ は未開設の施設, ■ は開設している施設を表す。

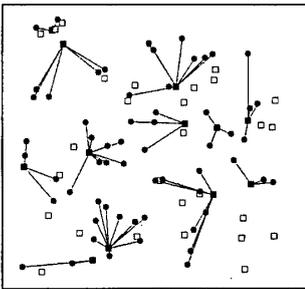


図 1 2.89 近似

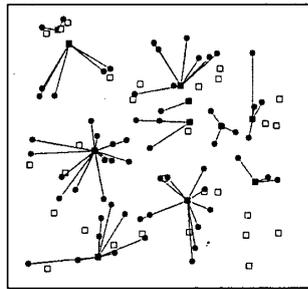
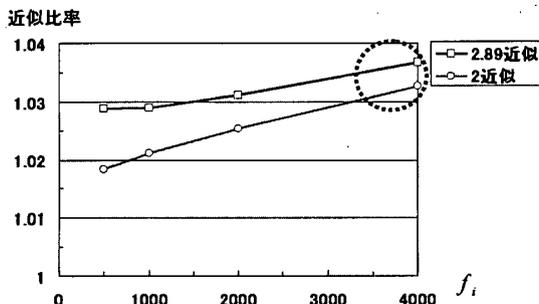


図 2 2 近似

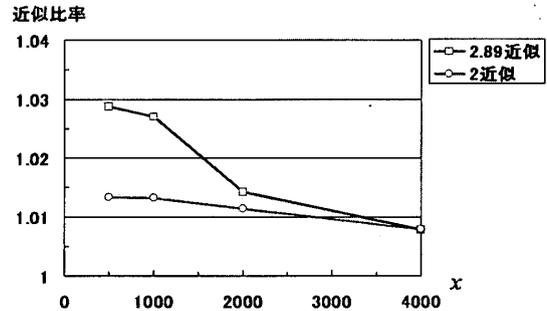
実験 1 開設コスト f_i を増加する場合

開設コスト f_i をすべての施設で一定とし, この値を増加した場合の性能評価を行う。



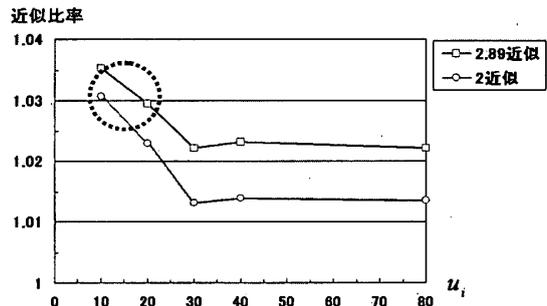
実験 2 接続コスト c_{ij} を増加する場合

開設コストを一定とし, 座標範囲 (x, x) を広くすることで接続コストが増加した場合の性能評価を行う。



実験 3 施設の容量 u_i を増加する場合

施設の容量 u_i をすべての施設で一定とし, この値を増加した場合の性能評価を行う。



6 まとめ

実験 1, 実験 2 より, 開設コストの影響は接続コストに比べて大きいことがわかる。また, 開設コストを一定にし増加させていくと, 2 近似アルゴリズムはより性能が落ちることがわかる。これは, 帰着させるときに開設コストの影響をより受けやすくなっているためと考えられる。また実験 3 より, 容量の制約を厳しくした場合も同様のことがいえる。逆に容量の制約を緩めた場合は, 1.61 近似アルゴリズムの本来の性能が発揮されるので, 良い値となっている。

本論文の入力データに対する近似比率は, 解析による値よりもかなり良くなってしまったので, 今後の課題としては, 解析による理論的な近似比率に近い近似比率を導く入力データを考え, 実際的な性能評価を行うことである。

参考文献

- [1] K. Jain, M. Mahdian and A. Saberi: A new greedy approach for facility location problems. *Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2002, pp. 731-740.
- [2] M. Mahdian, Y. Ye and J. Zhang: Improved approximation algorithms for metric facility location problems. <http://www.mit.edu/~mahdian/pub.html>, *APPROX*, 2002, pp. 229-242.
- [3] M. Mahdian, Y. Ye and J. Zhang: A 2-Approximation Algorithm for the Soft-Capacitated Facility Location Problem. *APPROX*, 2003, pp. 129-140.