日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

総頂点間短縮経路長を最大にする完全K分木への1辺追加

01204874　流通科学大学 情報学部　澤田　清　SAWADA Kiyoshi

1．はじめに

本研究では，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に1辺追加する場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする辺の位置を求める．

完全 K 分木の2頂点 v_i と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると (ただし，$l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$)，$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，1辺追加後の2頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により2頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを2頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．

2．深さ同一頂点間への辺追加

高さ H の完全 K 分木の，同じ深さ $N\,(N=1,2,\cdots,H)$ の2頂点間に1辺追加する場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする追加位置を求める．

根の異なる部分木の頂点間に辺を追加するときの総頂点間短縮経路長 $S_{1,H}(N)$ は，

$$
\begin{aligned}
&S_{1,H}(N)\\
&= \Big\{W(H-N)\Big\}^2(2N-1)+2W(H-N)\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{N-1}\Big\{(K-1)W(H-i-1)+1\Big\}(2i-1)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N-2}\Big\{(K-1)W(H-i-2)+1\Big\}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)W(H-N+j-1)+1\Big\}\\
&\quad\times(2i-2j+1) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と定式化される．ただし，$W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$ と定義する．

深さ $L\,(L=0,1,2,\cdots,N-1)$ の頂点の異なる部分木の頂点間に辺を追加した場合の総頂点間短縮経路長を $R_H(N,L)$ とすると，

$$R_H(N,L)=S_{1,H-L}(N-L) \qquad (2)$$

という関係が成り立つ．$R_H(N,L)$ を最大にする L は $L^*=0$ であることから，総頂点間短縮経路長を最大にするのは，根の異なる部分木の頂点間に辺を追加する場合である．さらに，式 (1) を最大にする深さ N^* に関して次の定理が得られる．

定理 1
(i) $K=2$ のとき，$H=1,2$ ならば $N^*=1$，$H\geq 3$ ならば $N^*=2$ である．
(ii) $K\geq 3$ とき，$N^*=1$ である．

3．祖先子孫間への辺追加

高さ H の完全 K 分木の，深さ $M\,(M=0,1,\cdots,H-2)$ の頂点と，その子孫である深さ $N\,(N=M+2,M+3,\cdots,H)$ の頂点との間に1辺を追加する場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求める．

総頂点間短縮経路長を $S_{2,H}(M,N)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&S_{2,H}(M,N)\\
&= W(H-N)\Big\{W(H)-W(H-M-1)\Big\}\\
&\quad\times(N-M-1)+W(H-N)\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N-M}{2}\rfloor-1}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\}\\
&\quad\times(N-M-2i-1)\\
&\quad+\Big\{W(H)-W(H-M-1)\Big\}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N-M}{2}\rfloor-1}\Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\}\\
&\quad\times(N-M-2i-1)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N-M}{2}\rfloor-2}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N-M}{2}\rfloor-i-1}\Big\{(K-1)W(H-N+j-1)+1\Big\}\\
&\quad\times(N-M-2i-2j-1) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

と定式化される．ただし，$\lfloor\cdot\rfloor$ は・を超えない最大の整数を表す．また，ここでも $W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表し，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，

$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する．

M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さ N^* に関して次の定理が得られる．

定理 2

(i) $K = 2$ のとき，$H \le 2M + 5$ ならば $N^* = M + 2$，$H \ge 2M + 6$ ならば $N^* = M + 4$ である．

(ii) $K \ge 3$ とき，$N^* = M + 2$ である．

さらに，総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さの対 $(M, N)^*$ に関して次の定理が得られる．

定理 3

(i) $K = 2$ のとき，$H = 2, 3, 4, 5$ ならば $(M, N)^* = (0, 2)$，$H \ge 6$ ならば $(M, N)^* = (0, 4)$ である．

(ii) $K \ge 3$ とき，$(M, N)^* = (0, 2)$ である．

4．祖先子孫間以外の異なる深さの頂点間への辺追加

高さ H の完全 K 分木の，深さ $L\,(L = 0, 1, 2, \cdots, H-1)$ の頂点の異なる部分木の，深さ $M\,(M = L+1, L+2, \cdots, H)$ の頂点と，それより深い深さ $N\,(N = M+1, M+2, \cdots, H)$ の頂点との間に 1 辺追加する．

この場合の総頂点間短縮経路長を $S_{3,H}(L, M, N)$ とすると，次のように定式化できる．

$$
\begin{aligned}
&S_{3,H}(L, M, N) \\
&= W(H-M)\,W(H-N)\,(M+N-2L-1) \\
&\quad + W(H-N) \sum_{i=1}^{M-L-1} \Big\{(K-1)W(H-M+i-1) \\
&\quad + 1\Big\}(M+N-2L-2i-1) \\
&\quad + W(H-M) \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M+N}{2} \rfloor - L - 1} \Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\} \\
&\quad \times (M+N-2L-2i-1) \\
&\quad + W(H-N) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 1} \Big\{(K-1) \\
&\quad \times W(H-L-i-1)+1\Big\}(N-M-2i-1) \\
&\quad + \Big\{W(H) - 2W(H-L-1)\Big\} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 1} \Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\} \\
&\quad \times (N-M-2i-1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 2} \Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\} \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - i - 1} \Big\{(K-1)W(H-L-j-1)+1\Big\} \\
&\quad \times (N-M-2i-2j-1) \\
&\quad + F_H(L, M, N)\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ただし，$F_H(L, M, N)$ は，$N = M + 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F_H(L, M, N) \\
&= \sum_{i=1}^{M-L-2} \Big\{(K-1)W(H-M+i-1)+1\Big\} \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M+N}{2} \rfloor - L - i - 1} \Big\{(K-1)W(H-N+j-1) \\
&\quad + 1\Big\}(M+N-2L-2i-2j-1)\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$N \ge M + 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F_H(L, M, N) \\
&= W(H-N)\Big\{W(H) - 2W(H-L-1)\Big\} \\
&\quad \times (N-M-1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-L-1} \Big\{(K-1)W(H-M+i-1)+1\Big\} \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M+N}{2} \rfloor - L - i - 1} \Big\{(K-1)W(H-N+j-1) \\
&\quad + 1\Big\}(M+N-2L-2i-2j-1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

である．また，ここでも，$\lfloor\cdot\rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表し，$W(h)\,(h = 0, 1, 2, \cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，$\sum_{i=1}^{-2} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する．

総頂点間短縮経路長 $S_{3,H}(L, M, N)$ の解析結果については，発表時に報告する．

参考文献

[1] 澤田 清, 宇野 斉, “完全２分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335–346, 2000.

[2] 澤田 清, “総頂点間経路長を最小にする完全２分木の階層間隣接化”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.13, No.3, pp.353–360, 2003.