日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

ピラミッドグラフの最短経路について

01007584　大阪工業大学　一森 哲男　ICHIMORI Tetsuo

1　はじめに

単純で規則的なグラフは，それ自身の性質を求めることが簡単なため，多くの応用で利用されている．例えば，メッシュ，木，ハイパーキューブ，コーダルリングなどは，何千個ものプロセッサ (PE=processing element) を用いる並列計算 (massively parallel) でよく用いられている．並列計算ではグラフの頂点がプロセッサでグラフの辺が通信路を表す．一般に，これらのグラフの直径や連結度を求めることはあまり難しくない．また，最短経路の計算やフォールトトレランスを考えたりすることも簡単な場合が多い．

ここでは，ピラミッドグラフの最短経路を解析的に解くことを考える．ただし，既にこの研究は他の研究者 HDS[1] により行われており，内容的に新しいものではない．ここでの成果はわずかなもので，HDS がアルゴリズムの形で 5 つの経路に限定したのに対し，ここでは 1 つに絞っただけである．

2　ピラミッドグラフの定義

記号は HDS に従う．ピラミッドグラフは階層構造を持ち 1 つの完全 4 分木と 1 つ以上のメッシュからなる．自然数 $l \geq 0$ に対して，この $l \geq 1$ 番目のメッシュは頂点集合

$$\{(l; x, y) \mid 0 \leq x < 2^l, 0 \leq y < 2^l\}$$

をもち，同一メッシュ上の 2 頂点 $(l; x, y)$, $(l; x', y')$ は

$$|x - x'| + |y - y'| = 1$$

のとき隣接する．また，$0 \leq l < n$ 番目のメッシュの各頂点 $(l; x, y)$ は $l+1$ 番目のメッシュの 4 頂点 $(l+1; 2x, 2y)$,$(l+1; 2x+1, 2y)$,$(l+1; 2x, 2y+1)$,$(l+1; 2x+1, 2y+1)$ と隣接する．ここで自然数 n はピラミッドの高さである．

$l \geq 1$ 番目のメッシュの各頂点 $v = (l; x, y)$ の親は

$$P(v) = \left(l-1; \lfloor\frac{x}{2}\rfloor, \lfloor\frac{y}{2}\rfloor\right)$$

であり，$1 \leq i \leq l$ 代上の先祖は

$$P^i(v) = \left(l-i; \lfloor\frac{x}{2^i}\rfloor, \lfloor\frac{y}{2^i}\rfloor\right)$$

である．

3　2 頂点間の距離

同一メッシュ M 上の 2 頂点 $v = (l; x, y)$, $v' = (l; x', y')$ を考える．このメッシュ内で最短の距離は明らかに

$$d_M(v, v') = |x - x'| + |y - y'|$$

である．また，その距離で結ぶ最短経路の 1 つを $P_M(v, v')$ と書く．しかしながら，この距離はピラミッドグラフ全体で考えれば，最短とは限らない．両者のピラミッドグラフ全体の最短経路を $P(v, v')$，その距離を $d(v, v')$ と書く．

おおざっぱに言えば

$$\begin{aligned} & d_M(P(v), P(v')) \\ & \qquad = \left|\lfloor\frac{x}{2}\rfloor - \lfloor\frac{x'}{2}\rfloor\right| + \left|\lfloor\frac{y}{2}\rfloor - \lfloor\frac{y'}{2}\rfloor\right| \end{aligned}$$

なので，1つ上のメッシュを通れば，距離が半分になる．しかし，1段上がって1段下がるので，その分，距離が2増える．だから，同一メッシュM上の2頂点$v = (l; x, y)$, $v' = (l; x', y')$の最短経路は，ある程度ピラミッドを登り，そこの高さのメッシュを横断し，また，元の高さのメッシュに戻ってくるのが最短である．

以上のことから最短経路 $P(v, v')$ が $P_M(v, v')$でない場合，直感的に

$$\begin{aligned} P(v, v') = (v, P(v), P^2(v), \ldots, P^i(v)) \\ \| P_M(P^i(v), P^i(v')) \\ \| (P^i(v'), \ldots, P^2(v'), P(v'), v') \end{aligned}$$

となる$1 \leq i \leq l$が存在することが理解できる．ここで，記号$\|$は経路の連接を表す．

問題は，1段上のメッシュに登るかどうかである．また，登るなら何段登ればよいかである．

最初の問題を考える．$d_M(P(v), P(v'))$の式を利用する．

$d_M(v, v) =$ 奇数ならば

$$d_M(P(v), P(v')) = \begin{cases} \frac{d_M(v,v')-1}{2} \\ \frac{d_M(v,v')+1}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

$d_M(v, v) =$ 偶数ならば

$$d_M(P(v), P(v')) = \begin{cases} \frac{d_M(v,v')-2}{2} \\ \frac{d_M(v,v')}{2} \\ \frac{d_M(v,v')+2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

これより表1が得られる．

以上のことより，一般には上のメッシュに登ったほうが近道であるが，$d_M(v, v')$ が小さくなってくると，表1の指針に従って $d_M(P(v), P(v')) + 2$ を計算して登るかどうかを決めればよい．明らかに，$d_M(v, v') < d_M(P(v), P(v'))+2$ならば，これは$d_M(v, v') \leq 4$でしか起きないが，この場合，登らないのが最適である．

$d_M(v, v')$	$d_M(P(v), P(v')) + 2$
1	2, 3
2	2, 3, 4
3	3, 4
4	3, 4, 5
5	4, 5
6	4, 5, 6
7	5, 6

表 1: 登るべきか

次に，登るなら何段登ればよいかを考える．式(1), (2)より

$$\frac{d_M(v, v') - 2}{2} \leq d_M(P(v), P(v')) \leq \frac{d_M(v, v') + 2}{2}$$

が成り立つが，これを$1 \leq k \leq l$回繰り返し用いると

$$\begin{aligned} \frac{d_M(v, v') + 2}{2^k} - 2 \leq d_M(P^k(v), P^k(v')) \\ \leq \frac{d_M(v, v') - 2}{2^k} + 2 \end{aligned}$$

となる．

定理 3.1 (一森)**.**

$$k = \lceil \lg \frac{d_M(v, v') + 2}{6} \rceil$$

のとき

$$2 \leq d_M(P^k(v), P^k(v')) \leq 7.$$

よって，$d_M(u, u') \leq 7$となる2頂点u, u'間の最短経路$P(u, u')$が既知とすれば，任意の$P(v, v')$が定まる．$m \geq l$として，uがm番目のメッシュ上の頂点で，v'がl番目のメッシュ上の頂点であれば$v = P^{m-l}(u)$として

$$P(u, v') = (u, P(u), P^2(u), \ldots, v) \| P(v, v').$$

参考文献

[1] H. Hsieh, D. Duh and J. Shiau, A constant time shortest-path routing algorithm for pyramid networks *IASTED*, (2004), 1–5.