1-B-12

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

ある種の２次錐計画問題に対する ピボットアルゴリズムの実装と評価

電気通信大学大学院 *栗田 圭介 KURITA Keisuke
01605610 電気通信大学 村松 正和 MURAMATSU Masakazu

1 はじめに

線形計画問題の制約に２次錐制約を加えた最適化問題は２次錐計画問題 (second-order cone programming, SOCP) と呼ばれ，主な解法として内点法が提案されている [3]．この種の問題に対して，単体法のようなピボット操作を用いた解法はこれまであまり研究されて来なかった．最近になってある種の２次錐計画問題に対するピボットアルゴリズムが Muramatsu[1] によって提案された．本研究はこのアルゴリズムを実装し，その効率を調べることを目的とする．

2 ２次錐計画問題

研究の対象となる問題は２次錐制約を唯一つ持つような問題であり，以下の形式を取る．

$$\langle P\rangle \begin{cases} \min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{u} + u_0 \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} + R\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{r+1} \end{cases}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$R \in \mathbb{R}^{m\times r}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^r$ であり，$r+1$ 次元の２次錐は，

$$\mathcal{K}_{r+1} = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1} \,\middle|\, u_0 \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{r} u_j^2} \right\}$$

と定義される．u_0 が制約に入っていないこと，および２次錐が１つであることがこの問題の特徴である．

3 辞書と部分問題

$\langle P\rangle$ において，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ に対する基底 (basis) をそれぞれ，$B \subseteq \{1,\dots,n\}$，$B' \subseteq \{1,\dots,r\}$ と定め，非基底 (nonbasis) を $N = \{1,\dots,n\}\backslash B$，$N' = \{1,\dots,r\}\backslash B'$ と定める．このように基底と非基底を定めると，それに対応した $\langle P\rangle$ の辞書 (dictionary) が１つ得られる．辞書は線形計画に対する通常の辞書を拡張する形で定義される．基底解 (basic solution) も同様である．基底解が許容解のとき，辞書は実行可能 (feasible) であると言う．

実行可能かつ非退化 (nodegenerate，これも線形計画の場合の拡張として定義される) な辞書が与えられたときに，ある非基底変数の値を増やして目的関数値を減少させることを考える．この問題は，次に現れる基底解が許容解となるべきであることを考慮すると，その非基底変数に関する部分問題を解くことに帰着する．部分問題は２次元の２次錐計画問題であり，$O(|B|)$ で解くことができる．部分問題が非有界であれば，$\langle P\rangle$ も非有界となる．

4 ピボットアルゴリズム

部分問題が基底解以外の最適解を持つとき，ピボットを行うことによって目的関数の値を下げることができる．その結果，新たな辞書が得られる．このような事実をもとに，ピボットを用いて２次錐計画問題を解くアルゴリズムが考

案された．以下のとおりである．

1. 実行可能な辞書が与えられる．
2. 任意の非基底変数に関する部分問題を解く．
3. ある部分問題が非有界であれば，$\langle P\rangle$ も非有界となるので，プログラムを終了する．
4. ある部分問題に対して自明でない最適解が見つかれば，ピボットを行い，新たな辞書を得て 2 へ戻る．
5. 全ての部分問題が自明な解を持つとき，$\langle P\rangle$ の最適解を計算してプログラムを終了する．

5 実装

以上のようなアルゴリズムに基づき，本研究では $\langle P\rangle$ を解くプログラムを Matlab によって実装した [4]．実装にあたって主に問題となる部分は以下のとおりである．

- **部分問題の解法**
  $\langle P\rangle$ の部分問題は２次元の２次錐計画問題である．この問題の２次錐制約を目的関数に代入し，問題を簡単化すると $O(|B|)$ で解くことができる．しかし，非線形計画問題であることには変わりが無いから，正確な解を見出すことはできず，数値誤差が出じる．これがピボットに対してどの程度影響するのか，どの程度の誤差まで許容するのかが，実装において重要な問題である．
- **退化している場合の処理**
  辞書が退化しているときにピボットを行っても，目的関数値は減少しない．そして，そういった場合にどのようにピボットするべきかも現在わかっていない．

アルゴリズムの実装によって期待されることは以下のとおりである．

- **収束に必要なピボット回数の解明**
  ピボットを用いたアルゴリズムが大域的収束をすることは既に分かっている [1]．しかし，有限回の反復で収束するかどうかはわかっていない．アルゴリズムを実装して数値実験を行うことにより，これらの疑問に対する解答のヒントが得られるかもしれない．
- **ピボット操作の視覚化**
  アルゴリズムの実装によって，ピボット操作を任意の視点において視覚化することが可能になる．これによって，ピボットアルゴリズムの動きを視覚的に確認することができ，関連研究の進展が期待される．
- **アルゴリズムの実用性の判定**
  ２次錐計画問題の解法には，本研究で提案したピボットアルゴリズムによる解法の他に従来の内点法による解法がある．それぞれの解法を比較検討することにより，ピボットアルゴリズムの実用性を判定することができる．

具体的な考察は発表に際して詳しく述べる．また，アルゴリズムの実例も紹介する．

参考文献

[1] Masakazu Muramatsu，A Pivotting Procedure for a Class of Second-oreder Cone Programming，Technical Report，CS03-02，Department of Computer Science，The University of Electro-Communications (2004).

[2] 田村 明久・村松 正和，最適化法，共立出版 (2002).

[3] 小島 政和・土屋 隆・水野 眞治・矢部 博，内点法，朝倉書店 (2001).

[4] Using MATLAB，The MathWorks Inc. (2002).