

凸2次関数の比の最大化問題の効率的解法に関する研究

02702020 MTEC *山本 零 YAMAMOTO Rei
01102370 中央大学 今野 浩 KONNO Hiroshi

1 はじめに

本研究は以下のような線形制約の下での凸2次関数の比の最大化に関する効率的な解法を提案するものである。

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad f(x) = \frac{x^T Q x + q^T x + q_0}{x^T P x + p^T x + p_0} \\ \text{条件} \quad Ax = b, 0 \leq x \leq \alpha \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで P は $n \times n$ の対称な正定値行列、 Q は $n \times n$ の対称な非負定値行列、 p, q は n 次元ベクトル、 p_0, q_0 は定数である。また、 A は $m \times n$ の行列、 b は m 次元のベクトル、 α は n 次元のベクトルであり、

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b, 0 \leq x \leq \alpha\} \quad (2)$$

は空ではない有界な空間とする。ここですべての $x \in X$ で $x^T P x + p^T x + p_0 > 0$ を仮定する。

この分数計画問題は Lo and MacKinlay によって 1997 年に決定係数最大化ポートフォリオ構築問題として定式化されたものであり、Gotoh and Konno によって 2001 年に厳密解法が提案されている。しかしながら、いまだ実用的な規模での最適化を行うには至っていない。

そこで本研究は整数計画法と Dinkelbach の解法、そして通常の局所探索法を組み合わせることで、実用的な規模の下で問題 (1) を効率的に解くことに成功した。

2 基礎分析

関数 $f(x)$ をもとに以下のような関数を定義する。

$$F(x; \lambda) = (x^T Q x + q^T x + q_0) - \lambda(x^T P x + p^T x + p_0) \quad (3)$$

ここで $\lambda > 0$ である。次に以下の2つの定理を紹介する。

定理 1.

$$\pi(\lambda) = \max_{x \in X} F(x; \lambda) \quad (4)$$

$$x(\lambda) = \arg \max_{x \in X} F(x; \lambda) \quad (5)$$

としたとき、 $\pi(\lambda^*) = 0$ となる $\lambda^* \geq 0$ が存在するならば、 $x^* \equiv x(\lambda^*)$ が問題 (1) の最適解である。

定理 2. 関数 $\pi(\lambda)$ は $\lambda \geq 0$ で単調減少の凸関数である。

以上により、問題 (1) は単調減少凸関数 $\pi(\lambda)$ の $\pi(\lambda) = 0$ を満たす点を求める問題となる。ここでの困難は、(4) 式で定義された $\pi(\lambda)$ が非凹型関数の最大化問題になることである。この問題の非凹型のランクは行列 $Q - \lambda P$ の正の固有値の数となり、これが大きくなると計算がより困難になる。

3 アルゴリズム

3.1 非凹型2次計画問題の解法

この節では問題 $\pi(\lambda)$ の解法について説明する。はじめに関数 $F(x; \lambda)$ の2次の項を行列 $Q - \lambda P$ の固有値、固有ベクトルを用いて直交変換する。

$$g(z; \lambda) = z^T \Theta z + (q^T - \lambda p^T) D^{-1} z + (q_0 - \lambda p_0) \quad (6)$$

$$z = D x \quad (7)$$

ここで $\Theta = \text{diag}(\theta_i)$ であり、 θ_i は $Q - \lambda P$ の固有値である。また、 D は各固有値の固有ベクトルからなる行列である。

すると問題 $\pi(\lambda)$ は以下のように書き直すことができる。

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad g(z; \lambda) \\ \text{条件} \quad A D^{-1} z = b, 0 \leq D^{-1} z \leq \alpha \end{array} \right. \quad (8)$$

この問題は目的関数の $\theta_i > 0$ の部分が非凹型となる。以下にこの問題を解くためのアルゴリズムを説明する。

アルゴリズム 1

1° 0-1 変数を用いて目的関数 $g(z; \lambda)$ の 2 次の項 $z^T \Theta z$ に対し区間 $[z_{i1}, z_{im}]$ で区分線形近似を行う (図 1)。

2° 区分線形近似した問題を解き、その最適解を z^* とする。

3° 近似誤差が許容誤差 ε 以内なら終了。そうでない場合は 4° へ。

4°

$$z_{is} = \{z_{ik} \mid z_{is} \leq z_i^* \leq z_{is+1}, k = 1, 2, \dots, m\}$$

となる区間 s を選び、 $z_{i1} := z_{is-1}$ 、 $z_{im} := z_{is+2}$ として 1° へ。

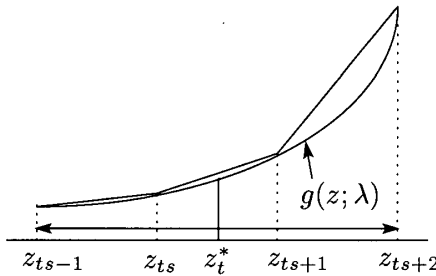


図 1. 目的関数の区分線形近似

3.2 問題 (1) の解法

次にアルゴリズム 1 使用した問題 (1) の解法を説明する。

アルゴリズム 2

1° $\pi(\lambda) > 0$ となる λ^l と $\pi(\lambda) < 0$ となる λ^u を見つける。

2° 行列 $P^{-1}Q$ の固有値を計算する。 $\pi(\lambda^u)$ を解き、 $\pi(\lambda^u) > -\varepsilon$ ならば終了。そうでなければ $\underline{\lambda} = \max\{\lambda^l, f(x(\lambda^u))\}$ とする。

3° $\theta_{n-k} > \underline{\lambda}$ のときは $\lambda_k = \theta_{n-k}$ 、そうでなければ $\lambda_k = \underline{\lambda}$ とする。

4° $\pi(\lambda_k)$ を解き、その最適解を x_k^* とする。もし $|F(x(\lambda^k), \lambda^k)| < \delta$ の場合には 7° へ。そうでなければ

(a) もし $\pi(\lambda_k) > \varepsilon$ のときは $\lambda^u = \lambda_1, \lambda^l = \lambda_k$ として 5° へ。

(b) もし $|\pi(\lambda_k)| < \varepsilon$ のときは終了。

(c) もし $\pi(\lambda_k) < -\varepsilon$ のときは $\underline{\lambda} = f(x_k^*)$ として 3° へ。

5° Ibaraki Search により λ_{k+1} を決定。

6° $\pi(\lambda_k)$ を解き、その最適解を x_k^* とする。もし $|F(x(\lambda^k), \lambda^k)| < \delta$ の場合には 7° へ。そうでなければ

(a) もし $\pi(\lambda_k) > \varepsilon$ のときは $\lambda^l = \lambda_k$ として 5° へ。

(b) もし $|\pi(\lambda_k)| < \varepsilon$ のときは終了。

(c) もし $\pi(\lambda_k) < -\varepsilon$ のときは $\lambda^u = \lambda_k$ として 5° へ。

7° $x(\lambda^k)$ を出発点として、局所探索で問題 (1) を解く。

4 計算機実験

以上のアルゴリズムについて計算機実験を行った結果について説明する。実験を行った問題は以下のようなものである。

$$(P) \begin{cases} \text{最大化} & f(x) = \frac{x^T Q x}{x^T P x} \\ \text{条件} & \sum x_i = 1, 0 \leq x \leq 0.1 \end{cases} \quad (9)$$

計算機環境は Athlon XP2000(512Mbyte, 1.67GHz) であり、アルゴリズム 1 の部分には CPLEX7.1、局所探索の部分には NUOPT5.0 を使用した。以下に局所探索を使用しない場合の計算結果を示す。ここ

$r \setminus n$	30	50	100	200
5	8.4	18.8	61.0	368.8
10	8.6	24.0	76.0	447.0
15	24.8	132.0	280.0	
20	118.6	258.6	2599.8	

表 1: 計算時間 (秒)

で r は行列 Q のランクであり、 r が大きくなると非凹性のランクも大きくなるため問題が困難になる。

表 1 より、ランクの低い問題であれば局所探索を使用しない場合でも実用的な時間で計算が終了していることがわかる。当日の発表では局所探索を使用した場合の計算結果を示し、ランクが大きい場合の問題も解けることを実証する。

参考文献

Gotoh, J. and Konno, H., "Maximization of the Ratio of Two Convex Quadratic Functions over a Polytope", *Computational Optimization and Applications*, 20(2001) 43-60.