日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

絶対偏差比最小化問題の解法

申請中	中央大学	*土屋 賢一	TSUCHIYA Kenichi
02702020	MTEC	山本 零	YAMAMOTO Rei
01102370	中央大学	今野 浩	KONNO Hiroshi

1 はじめに

ポートフォリオ理論において、最大予測可能性を持つポートフォリオを構築するモデルが、Lo and MacKinlay[3] によって提案されている。それは 2 つの分散の比を最大化する問題として定式化される。ところがこの問題は、目的関数が非凹型関数になるため標準的な方法を用いることはできない。

そこで Gotoh and Konno[2] は、低ランク非凸型 2 次計画問題の解法を利用した解法を提案しているが、この方法を用いても実用的な規模の問題を解くことは困難であった。

その一方で、リスク指標を分散ではなく、絶対偏差に置き替えても予測可能性の高いポートフォリオが得られるものと予想される。また絶対偏差は、線形式に書き直すことができるため、計算も容易である可能性が高い。

本論文では、リスク指標として、絶対偏差を用いた絶対偏差比最小化問題を考え、2 種類の解法を提案する。1 つは、問題の構造を利用した分枝限定法で、もう一つは 0-1 整数計画法を用いた解法である。この 2 つの解法を用いて、実用的な規模を実用的な時間で解けることを確認する。

2 定式化

以下では

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{t=1}^{T} |\sum_{j=1}^{n} f_{jt} x_j|$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{t=1}^{T} |\sum_{j=1}^{n} g_{jt} x_j|$$

と置き、この 2 つの関数の比の最小化問題

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} = b,\ \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \\ & A \in R^{m \times n},\ b \in R^m \end{array}\right. \qquad (1)$$

を考える。この問題は、$f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ ともに凸関数なので Dinkelbach のパラメトリック解法を用いることはできない。まず、この問題に新たな変数 $y_0 = 1/g(\boldsymbol{x})$ を導入して問題 (1) を

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) y_0 \\ \text{条件} & g(\boldsymbol{x}) y_0 = 1 \\ & A\boldsymbol{x} y_0 - b y_0 = 0 \\ & \boldsymbol{x} \geq 0,\ y_0 \geq 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

と変形する。さらに、変数 $y = xy_0$ を導入すると、問題 (2) は

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{t=1}^{T} |\sum_{j=1}^{n} f_{jt} y_j| \\ \text{条件} & \sum_{t=1}^{T} |\sum_{j=1}^{n} g_{jt} y_j| = 1 \\ & Ay - by_0 = 0 \\ & y \geq 0,\ y_0 \geq 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

と等価である。

ここで、絶対偏差の部分を線形に変形するために、新たな変数 u_t, v_t, ξ_t, η_t を導入し、式を変形すると問題 (3) は以下のようになる。

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{t=1}^{T} u_t + \sum_{t=1}^{T} v_t \\ \text{条件} & \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \sum_{t=1}^{T} \eta_t = 1 \\ & u_t - v_t = \sum_{j=1}^{n} f_{jt} y_j, t = 1, \ldots, T \\ & \xi_t - \eta_t = \sum_{j=1}^{n} g_{jt} y_j, t = 1, \ldots, T \\ & u_t \geq 0,\ v_t \geq 0,\ \xi_t \geq 0,\ \eta_t \geq 0, \\ & \qquad\qquad t = 1, \ldots, T \\ & Ay - by_0 = 0,\ y \geq 0,\ y_0 \geq 0 \\ & \xi_t \eta_t = 0, \quad t = 1, \ldots, T \end{array}\right. \qquad (4)$$

以下では、この問題を解くための分枝限定法を用いた解法と 0-1 整数計画法を用いた解法を示す。

(1) 0-1 整数計画法

$q_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, 2, \ldots, T$ を導入し、問題 (4) を以下の 0-1 整数計画問題として定式化する。

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \sum_{t=1}^{T} u_t + \sum_{t=1}^{T} v_t \\
&\text{条件} \quad \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \sum_{t=1}^{T} \eta_t = 1 \\
&\qquad u_t - v_t = \sum_{j=1}^{n} f_{jt} y_j, \ t = 1, \dots, T \\
&\qquad \xi_t - \eta_t = \sum_{j=1}^{n} g_{jt} y_j, \ t = 1, \dots, T \\
&\qquad u_t \geq 0, \ v_t \geq 0, \ \xi_t \geq 0, \ \eta_t \geq 0, \\
&\qquad\qquad t = 1, \dots T \\
&\qquad L \cdot (q_t - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} g_{jt} y_j \leq U \cdot q_t, \\
&\qquad\qquad t = 1, \dots T \\
&\qquad 0 \leq \xi_t \leq U \cdot q_t, \ 0 \leq \eta_t \leq L \cdot (1 - q_t), \\
&\qquad\qquad t = 1, \dots T \\
&\qquad Ay - by_0 = 0, \ y \geq 0, \ y_0 \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

（2）分枝限定法

問題 (4) は、相補性条件 $\xi_t \eta_t = 0$ が問題を困難にしている。しかし、この条件を外せば線形計画問題になる。そこで、この線形計画問題を子問題とする分枝限定法のアルゴリズムを提案する。

＜分枝限定法のアルゴリズム＞

0° $\Gamma = (Q_0)$, $\hat{f} = +\infty$, $\hat{F} = -\infty$ とする。

1° $\Gamma = \{\phi\}$ なら終了。そうでないときは 2° へ。

2° 最も小さい f^l に対して $(Q^l) \in \Gamma$ を選び、$\Gamma = \Gamma \backslash \{(Q^l)\}$ とする。

3° $F^l - f^l < \varepsilon$ ならば 6° へ。そうでないときは、4° へ。

4° $\hat{f} > f$ ならば 5° へ。そうでないときは、$\hat{f} = f$, $\hat{F} = F$ として $f^t \leq \hat{F} + \varepsilon$ であるすべての子問題 (Q^t) を削除して 1° へ。

5° $f^l \leq \hat{f} + \varepsilon$ ならば 1° へ。そうでないときは、6° へ。

6° $\xi_t^l \eta_t^l > 0$ となる t に対して、条件（$\xi_t^l = 0$ or $\eta_t^l = 0$）を加えた 2 つの子問題 $(Q^{l+1}), (Q^{l+2})$ を生成する。$(Q^{l+1}), (Q^{l+2})$ を解き、実行不可能だった場合、1° へ。そうでない場合、上界値 F、下界値 f を求め、$\Gamma = \Gamma \cup \{Q^{l+1}, Q^{l+2}\}$ として、1° へ。

3 計算機実験

この問題を CPLEX8.1 を用いて計算した結果について説明する。用いたデータは、TOPIX の月次データを用いた。表 1 には、$n = 100$ の時の計算時間を、表 2 には、$n = 200$ の時の計算時間を示した。なお計算機環境は、CPU が 2.8GHz、メモリが 1024Mbyte である。

T	0-1 整数計画法	分枝限定法
6	0	0
12	3	20 (0)
18	98	1070 (2)
22	1094	3164 (29)
30	34224	—

表 1: 計算時間（秒）　n=100

T	0-1 整数計画法	分枝限定法
6	0	0
12	4	20 (0)
18	170	1481 (1)
24	5767	—

表 2: 計算時間（秒）　n=200

分枝限定法の計算時間の () 内の数字は、最適解が求めるまでの時間を表す。

4 考察と結果

・0-1 整数計画法と分枝限定法では、前者のほうが大きな問題を解くことが可能である。これは、分枝限定法によるアルゴリズムを用いた場合、途中の多大な数の解を保存しなくてはならず、計算機のメモリを多く使用することが原因と思われる。

・計算時間に関しては、0-1 整数計画法の方が早く解けていることがわかる。しかし、分枝限定法のアルゴリズムを用いて計算したものは、ほとんどの場合 0-1 整数計画法を用いたものより早い段階で最適解を見出している。

当日の発表では、これらを含めた詳細な実験結果を報告する。

参考文献

[1] 今野浩：「理財工学 II」，日科技連出版社，1998.

[2] J. Gotoh, and H. Konno, "Maximization of the Ratio of Two Quadratic Function over a Polytope", *Computational Optimization and Applications, 20* (2001).43-60.

[3] A. Lo and C. MacKinlay, "Maximizing predictability in the stock and bond markets", *Macroeconomic Dynamics,1* (1997). 102-134.

[4] W. Dinkelbach, "On nonlinear fractional programming", *Management Science, 13* (1967). 492-498.