日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

数式による記述で数理計画問題を解く試み—2

01701240　（株）数理システム　＊山下　浩　YAMASHITA Hiroshi
01308690　（株）数理システム　高橋　良徳　TAKAHASHI Yoshinori

1. はじめに

最適化問題を数式で記述し数値的に解く試みについて [1] でその概要を報告した．本稿はその続編で，より詳細な説明と，このシステムの利用法に関する若干の報告である．

このようなシステムの重要性に関しては，前回も触れたが再度強調したい．現在では，数理計画問題をコンピュータによって解かせるためにはGAMS,AMPL,SIMPLEなどのモデリング言語によって問題を記述することが多い．この方式は多くの利点を持っているが，モデリング言語といえどもプログラミング言語と同様の使用上の困難さが存在する．このバリヤを無くして教科書に書いてある問題をそのまま入力すれば最適解が得られるように，というのが数理計画問題を数式で記述する最終目的である．以下に述べるように，ほぼこの目的は達成されたと考えている．これによって，数理計画法の学習・習得・普及にプラスとなれば幸いである．(数式自体がバリヤとなる人にとっては，本方式は役に立たない．このような場合には別種の技術が考えられるが，このテーマは本稿の範囲外である.)

2. 使用法

ユーザーはMicrosoft Wordを開き，文書に数理計画問題を記述する．数式の入力法としてWordのアドオンとして付属している数式エディタMathTypeを利用する．もちろん，このとき数理計画問題以外の情報（たとえば，その問題の周辺情報・解説など）をWordドキュメントに加えても差し支えない．

MathTypeによって記述された問題を解くために，以下のような手順が実行される．

・MathTypeによって数式情報がTeX形式に変換される．

・TeXで記述された文書をモデリング言語SIMPLEの記述に変換する．(*)

・数理計画パッケージNUOPTが問題を解く．

・最適解の情報をMathTypeの形式に変換してWordドキュメントに書き出す．

上記の記述で明らかなように，Wordに記述された文書（数理計画問題）は自由に変更可能で，その問題に対する最適解がその場で（その文書上に）得られる．その意味で，その文書は生きた技術ドキュメント（ライブドキュメント），生きた教科書（ライブテキストブック）となる．

3. 処理の流れ

本システムでは，上記 (*) が最も困難な箇所であるが，以下で簡単な例題を元に解説する．以下のような数理計画問題（ナップサック問題）:

$$
\begin{array}{l}
\text{problem} \\
\text{set}\, S \\
\text{index}\, i \in S \\
\text{parameter}\, a_i, c_i, b \\
\text{integer variable}\, x_i \in \{0,1\} \\
\text{maximize}\, z = \sum\limits_i c_i x_i \\
\text{subject to} \quad \sum\limits_i a_i x_i \leqslant b
\end{array}
$$

はMathTypeによって以下のようなTeX形式に変換される．

```
\[
{\text{problem}} \hfill \newline
{\text{set}}\,S \hfill \newline
{\text{index}}\,i \in S \hfill \newline
{\text{parameter}}\,a_{i} ,c_{i} ,b \hfill
\newline
{\text{integer}}\,{\text{variable}}\,x_{i} \in
\{ 0,1\} \hfill \newline
{\text{maximize}}\,z = \sum\limits_{i}
{c_{i} x_{i}\ } \hfill \newline
{\text{subject to}} \hfill \newline
\sum\limits_{i} {a_{i} x_{i} } \leqslant b
\hfill\ \newline
\]
```

本システムは，これを

```
/* PROBLEM */
Set S;
Element i (set = S);
Parameter a(index = i), c(index = i), b;
IntegerVariable x(index = i, type = binary);
Objective z(type = maximize);
z = sum(c[i] * x[i], i);
```

```
/* Constraint(s) */
sum(a[i] * x[i], i) <= b;
```

と SIMPLE による記述に変換する．上記は単なる一例であるが，広範囲かつ自由な数式記述に対応することが技術的に容易ではないことが理解されると思う．

使用可能な数学記号は以下の通りである．

$\leqslant\ \geqslant\ \neq\ +\ -\ \times\ /\ \cdot\ \langle\ \rangle\ \neg\ \wedge\ \vee$

$\in\ \notin\ \cup\ \cap\ \cup\ \cap\ \subset\ \supset\ \subseteq\ \supseteq$

$(a)\ [b]\ \{c\}\ \langle d\rangle\ |e|\ \lfloor g\rfloor\ \lceil h\rceil$

$\frac{x}{y}\ \frac{1}{2}\ 1/2\ \sqrt{2}\ \sqrt[3]{2}\quad x^2\ x_2\ x_1^2$

$\sum\limits_i x_i\quad \sum\limits_{i\,=\,1}^{n} x_i\quad \sum_i x_i\quad \sum_{i\,=\,1}^n x_i$

$\prod\limits_i x_i\quad \prod\limits_{i\,=\,1}^{n} x_i\quad \prod_i x_i\quad \prod_{i\,=\,1}^n x_i$

また，使用可能な関数は以下の通りである．

sin cos tan arcsin arccos arctan

sec csc cot *asec acsc acot*

sinh cosh tanh *arcsinh arccosh arctanh*

sech coth *asech acsch acoth* hypot

exp e^x log $\log_{10}$ x^z

$\lceil x\rceil\ \lfloor x\rfloor\ |x|\ x \bmod y$

3. 問題記述の例

以下では，本システムによる数理計画問題の記述例によって，問題定義の自由度の概略を示す．自由な数式記述と言っても，コンピュータへの入力であるから必然的にある種のルールが必要になるが，実際上十分なだけの記述能力があることが理解されるであろう．配置の都合上，右段に掲載する．

4. 数理計画のモデルライブラリーの概念

数式で記述された数理計画の問題（モデル）がそのまま解けて最適解が得られるようになると，色々な利用の仕方が考えられる．ここでは，最も直接的なものを一つだけあげる．

数理計画の多くのモデルが例題として教科書に（数式で）記述されているが，これらのモデルを例題データと共にコンピュータによって解けるようにするためには，通常は特定のモデリング言語による記述として存在する．最終的にはモデリング言語による記述を利用した方がフレキシビリティがあるので，数理計画の利用のためにモデリング言語自身を学習することは無駄ではないが，ビギナーにとってはこのことが数理計画法の習得のバリヤになることも考えられる．そこで，(教科書の記述とほぼ同じ形式の）数式によるモデルライブラリーがあって，それらを使ってあるいはそれらを修正して最適解を得る体験は数理計画のモデル・アルゴリズムの理解にとって非常に有益であると考えられる．本システムがこのようなライブラリー構築のためのプラットフォームとして利用されれば幸いである．

● Hock and Schittkowski No.105

index	i, j
variable	x_j
parameter	$y_i,\ \pi = 6\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$
Expression	a_i, b_i, c_i
	$a_i := \frac{x_1}{x_6}\exp(-(y_i - x_3)^2/(2x_6^2))$
	$b_i := \frac{x_2}{x_7}\exp(-(y_i - x_4)^2/(2x_7^2))$
	$c_i := \frac{(1-x_2-x_1)}{x_8}\exp(-(y_i - x_5)^2/(2x_8^2))$
minimize	$-\sum\limits_{i=1}^{235}\log((a_i + b_i + c_i)/\sqrt{2\pi})$
subject to	$1 - x_1 - x_2 \geq 0$
	$0.001 \leq x_j \leq 0.499,\ j \in \{1, 2\}$
	$100 \leq x_3 \leq 180$
	$130 \leq x_4 \leq 210$
	$170 \leq x_5 \leq 240$
	$5 \leq x_j \leq 25,\ \ j \in \{6, 7, 8\}$

●ポートフォリオ最適化

index	i, j
parameter	$N, r_i, \sigma_{ij}, \rho$
variable	x_i
minimize	$risk = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j$
subject to	$\sum\limits_{i=1}^{N} r_i x_i = \rho$
	$\sum\limits_{i=1}^{N} x_i = 1$
	$x_i \geq 0,\ i \in \{1...N\}$

●フィッティング

problem	
Set	$Samples, T$
Variable	σ, γ, β
index	$i \in Samples, j \in T$
Variable	e_i
Parameter	x_i, y_i, rp
Expression	A, b_j
	$A := 10\beta - 12\gamma^2 - 18$
	$b_0 := -\sigma^2(4\beta - 3\gamma^2)/A$
	$b_1 := -\sigma\gamma(\beta + 3)/A$
	$b_2 := -(2\beta - 3\gamma^2 - 6)/A$
	$x_i := x_i - rp$
minimize	$\sum\limits_i e_i^2$
subject to	$e_i = \frac{1}{2b_2}\log\left|b_2 x_i^2 + b_1 x_i + b_0\right|$
	$-\frac{2b_1 + (b_1/b_2)}{(\sqrt{4b_0 b_2 - b_1^2})}\tan^{-1}(\frac{2b_2 x_i + b_1}{(\sqrt{4b_0 b_2 - b_1^2})}) - y_i$

参考文献

[1] 高橋，山下　”数式による記述で数理計画問題を解く試み” 日本オペレーションズリサーチ学会 2003 年秋季研究発表会アブストラクト集，186-187.