日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

提携のされやすさを考慮した多選択肢投票ゲームの影響力指数

申請中　関西大学　*桝屋　聡　MASUYA Satoshi
01401144　関西大学　中井　暉久　NAKAI Teruhisa

1．はじめに

投票ゲームの影響力指数でこれまでに考案されてきたものには、Shapley-Shubik 指数(SS 指数),Banzhaf 指数(B 指数),Deegan-Packel指数(DP指数)[1]といったものが代表的である。しかし、これらの影響力指数には共通の問題点がある。それは、影響力を測定するときに投票者は全て同じ性質をもつと仮定している点である。しかし、現実には投票者が全て同質であるとは考えにくい。その点を考慮した影響力指数として、SS指数をもとにしたShapley-Owen 指数(SO 指数)[2]等が考案されている。また、投票システムにおける選択肢の数が３つ以上ある多選択肢投票ゲームにおいては、SS指数を元にしたBolger指数[3]等が考案されている。

そして、本研究では、「投票者同士は同質でない」ということと「多選択肢投票ゲームにも適用できる」ということを仮定してDP 指数を元にした影響力指数の考案を行う。

2．投票ゲーム

n 人よりなる投票者の集合をＮとする。Ｎの部分集合Ｓのメンバーが相談の上同一選択肢に投票するとき、Ｓを提携と呼ぶ。提携Ｓに属するメンバー全員が投票した選択肢が可決されるとき、提携 S を勝利提携と呼び、その全体を W で表す。また、投票した選択肢が否決されるとき、提携 S を敗北提携と呼び、その全体を L で表す。そして、提携 S の得る利得を表す関数v(S)を次のように定義する。

$$v(S)=\begin{cases}1 & S\in W\\ 0 & S\in L\end{cases}$$

3．提携のされやすさの数量化

本研究では、投票者同士が同質でないということを仮定した影響力指数を考案するということであったが、投票者同士が同質でないということは、すべての提携の形成確率は等しくないということである。提携のされやすさを数量化する手法として因子分析を用いる。具体的には、因子分析によって得られた投票者間の距離が近いほどそれらの投票者同士は性質が似ていると言える。これを利用し、投票者間の距離から提携の形成確率を求める。

4．Deegan-Packel 指数

最小勝利提携(以下 MWC)：どの投票者が抜けても敗北提携になる勝利提携。

<u>DP指数の前提条件</u>

1.　各投票者はMWC に属する時影響力を持つ。
2.　MWC に属する投票者は利得を等分割する。
3.　全てのMWC は等確率で形成される。

これらの条件から数式化すると、DP 指数は次のように与えられる。

$$\mu_i=\frac{1}{|W^m|}\sum_{S\in W^m, i\in S}\frac{1}{|S|}\quad i\in N\quad W^m:\text{最小勝利提携の全体}\qquad(1)$$

5．新しい影響力指数

新指数では、DP 指数に対して、提携のされやすさを考慮した影響力指数の考案を行う。つまり、前提条件４を次のように改善する。

<u>4'. それぞれのMWCは投票者同士の考え方が似ているほど形成されやすく、また投票者の数が少ないほど形成されやすい。</u>

(投票者の数が多いほど投票者同士の意見の調整等がしにくくなり提携は形成されにくくなる。)

数学的には、各最小勝利提携の形成確率は、因子分析によって得られた提携Ｓの距離 d(S)の α 乗に反比例し、また提携内の投票者の数の β 乗に反比例すると設定する。

以下、新指数の数式化を行う。

因子分析によって得られた投票者の位置を m 次元ユークリッド空間上における

$x^1, x^2, \cdots, x^n$ とする。提携Ｓに含まれる投票者 i,j 間の距離 d(i,j)を次のように定義する。

$$d(i,j)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(x_k^i-x_k^j\right)^2}\ ,\text{for } i,j\in S\ S\in W^m$$

次に、提携Ｓの距離 d(S)を次のように定める。

$$d(S)=\sum_{i,j\in S}\frac{d(i,j)}{h}\quad \text{for } i<j$$

これにより提携Ｓの中の平均の距離が求まる。

そして、この提携 S の距離 d(S)と S の要素数 |S| を用いて、提携 S の形成確率 p(S)を次のように設定する。

$$p(S)=\frac{\left(\frac{1}{d(S)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{|S|}\right)^{\beta}}{\sum_{J\in W^m}\left(\frac{1}{d(J)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{|J|}\right)^{\beta}}$$

p(S)は、各最小勝利提携の形成確率は、提携Ｓの距離 d(S)の α 乗に反比例し、またＳの要素数の β 乗に反比例するということ

を意味している。

この提携Sの形成確率p(S)を用いて、新しい影響力指数を次のように定義する。

$$\mu_i^g = \sum_{S\in W^m, i\in S} \frac{\left(\frac{1}{d(S)}\right)^\alpha \left(\frac{1}{|S|}\right)^\beta}{\sum_{J\in W^m}\left(\frac{1}{d(J)}\right)^\alpha \left(\frac{1}{|J|}\right)^\beta} \times \frac{1}{|S|} \quad i\in N \qquad (2)$$

d(S)：因子分析によって得られた提携Sの距離

|A|：集合Aの要素数

α、β：定数(α=0かつβ=0の時、新指数はDP指数となる。)

6．新指数の多選択肢投票ゲームへの拡張

(2)式は選択肢の数が2つの投票システムにしか適用できない。そこで、新指数の多選択肢投票ゲームへの拡張を行う。多選択肢投票ゲームの定義はBolger[3]の方法に従う。

投票者の集合を N={1,2,・・・,n}として、選択肢の集合をR={1,2,・・・,r}とする。各投票者は自分の支持する1つの選択肢に必ず投票するものとする。このとき、選択肢iに投票した投票者の集合をC(i)としこれを提携と呼ぶ。そして、提携分割Cを$C=\{C(1),C(2),\cdots C(r)\}$と定義する。

この提携分割を用いて(2)式を多選択肢投票ゲームへ拡張した指数を次のように定義する。

$$\mu_i^g(v) \equiv \sum_{S\in\Gamma_i(v)} \frac{\left(\frac{1}{d(M(S))}\right)^\alpha \left(\frac{1}{|M(S)|}\right)^\beta}{\sum_{C\in\Gamma(v)}\left(\frac{1}{d(M(C))}\right)^\alpha \left(\frac{1}{|M(C)|}\right)^\beta} \times \frac{1}{|M(S)|}$$

(i=1,・・・,n) (3)

$M(C)$: 提携分割Cに対するMWC

$\Gamma(v)$: ｹﾞｰﾑvにおけるMWCの存在する提携分割の集合

$\Gamma_i(v)$: ｹﾞｰﾑvにおける投票者iを含むMWCの存在する提携分割の集合

このとき、次の定理が証明された。

定理：新指数(3)が唯一つ存在するためには、以下の条件1～4 が成立することが必要十分である。

1. どの最小勝利提携にもはいっていない投票者の指数は0である。
2. 投票者の名前の変更は指数に関係しない。
3. 指数の総和は1である。
4. 合成ゲームの指数は成分ゲームの指数の重みつき平均で表される。

7．新指数による参議院の影響力分析

参議院の各政党を投票者とし、その議員数を持ち票数と考える。また、因子分析するためのデータとして、参議院で審議された議案に対して各政党がどのように反応したかというデータを用いる。新指数を計算した結果、定数はα=1.5, β=1 の時が適当であることがわかった。各政党の議席比率、SS指数、B指数、DP指数、新指数の計算結果は表1のようになる。

表1．各政党の議席比率及び影響力指数

政党(投票者)	議席比率	SS指数	B指数	DP指数	新指数
自民党	0.421053	0.571429	0.608696	0.277778	0.408089
民主・新緑風会	0.226721	0.104762	0.086957	0.122222	0.06234
公明党	0.097166	0.104762	0.086957	0.122222	0.20643
共産党	0.093117	0.104762	0.086957	0.122222	0.092995
社民・護憲連合	0.05668	0.038095	0.043478	0.118519	0.052552
自由党	0.048583	0.038095	0.043478	0.118519	0.092003
参議院の会	0.040486	0.038095	0.043478	0.118519	0.08559
二院クラブ・自由連合	0.016194	0	0	0	0

新指数と他の影響力指数を比較してみると、投票者は全て同質であると仮定しているSS指数、B指数、DP指数では、民主党、公明党、共産党を全て影響力は等しいとしている。それに対して新指数では、公明党が議席数では民主党よりも少ないものの、影響力では、民主党の約3倍になっている。これは、公明党が議席数の最も多い自民党と考え方が似ていて、民主党、共産党が自民党と考え方が大きく異なるということから考えてみて、現実を反映していると考えられる。また、社民党と自由党を比較してみると、SS指数、B指数、DP指数では、やはり、この2つの政党の影響力は等しいとしている。しかし、新指数では、議席数では社民党よりも自由党の方が少ないが、影響力では自由党が社民党の約2倍となっている。これも、自由党が自民党と考え方が似ていて社民党が自民党と考え方が大きく異なるということから考えてみて、現実を反映していると考えられる。

8．結論

以上から、「投票者同士は同質でない」ということを仮定して、DP指数を元にして、投票者の影響力をより現実的に評価する影響力指数を考案することができた。また、新指数を多選択肢投票ゲームへ拡張し、指数が存在するための必要十分条件を導出した。

参考文献

[1] .Deegan and E.W.Packel, "A new Index of Power for simple n-person games", *International Journal of Game Theory*, Vol.7, pp113-123, 1978

[2] Owen.G."Political games", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.22, pp741-750, 1975

[3] Bolger,E.M..,"A value for games with n players and r alternatives", *International Journal of Game Theory*, Vol.22, pp319-334, 1993

[4] Rapoport,A .and E.Golan,"Assessment of political power in the Israeli Knesset", *American Political Science Review*, Vol.79, pp673-692, 1985