ゆとりの数量的表現に関する一考察（III）

01007334　関西学院大学総合政策学部　井垣　伸子*　IGAKI Nobuko
02201844　摂南大学工学部　諏訪　晴彦　SUWA Haruhiko
01204194　流通科学大学情報学部　三道　弘明　SANDOH Hiroaki

1.　ゆとりの定義

「ゆとり」は，昨今の「癒し」ブームにも関連して，日常よく使われる言葉である。その言葉自体は定量的な印象を与えつつも定性的な概念であったが，三道[1]により初めて，「ゆとり」を定量的に計測するための具体的な尺度が示された。つまり，ある仕事に対して「ゆとりがある」とは，その仕事の円滑な処理を妨げるかもしれないような予期せぬ事象が発生しても，これらを吸収し，その仕事を納期までに完了させられる可能性がある水準以上であることをいう。ここでいう仕事とは，仕事の量 w だけを指すのではなく，その処理能力 c と納期 d をセットにして考え，仕事 $J(c,w,d)$ として捉える。このとき，ゆとりの大きさ A は，仕事 $J(c,w,d)$ が納期 d までに完了する確率 (達成確率)p と，定められたゆとりの臨界確率 p_0 とを使って，つぎの式で定義される。

$$A = \begin{cases} 0, & p < p_0 \\ p - p_0, & p \geq p_0 \end{cases}$$

2.　特急ジョブを考慮したゆとり

仕事の達成確率を考えるとき，現実には処理時間がランダムな振る舞いを示すことが容易に理解できる。この要因としては，(１) 仕事の処理時間が本来ランダムな振る舞いを示す，(２) 予期せぬ事象や，あるいは，緊急を要するジョブが発生する，などが考えられる。

ここでは，日々の仕事として，固定された仕事 (固定ジョブ) を処理することを考える。しかし固定ジョブ以外にも，特急ジョブもしばしば発生するものとする。また，特急ジョブの受付は時刻 $T(<d)$ までに発生したものに制限することとし，時刻 T までに受け付けられた特急ジョブは，固定ジョブよりも優先的に処理されることとする。但し固定ジョブは，特急ジョブの処理のためにいつでも中断可能 (preemptive[2]) であり，また特急ジョブの処理が終わり次第再開可能 (interrupt-resume[3]) であるものとする。このとき，ゆとりを確保するには，特急ジョブの受付終了時刻 T をどのように設定すればよいかという問題が発生するが，このためには固定ジョブ，特急ジョブの双方が納期 d までに完了する確率の導出が不可欠である。

固定ジョブの処理時間 T_0 も特急ジョブの処理時間 $S_1, S_2, \cdots$ もすべて互いに独立な確率変数とする。固定ジョブ処理時間の分布を $F(t)$，特急ジョブ処理時間の分布は同一の $H(t)$ とする。また，特急ジョブの発生間隔もランダムであり，その分布を $G(t)$ とおく。今，一日の作業の始まる時刻を 0，作業員がその日のすべてのジョブ処理を完了し帰宅できる時刻を TE とし，帰宅希望時刻を納期のように考えて d とおくとき，この仕事のゆとりを調べるには，達成確率 $Pr\{TE \leq d\}$ を求めることが必要になる。

2.1　M/M/1

まず，特急ジョブ発生間隔とその処理時間が指数分布の場合を考え，平均をそれぞれ $1/\lambda$，$1/\mu$ とおく。時刻 T において，それまでに処理の完了していない特急ジョブの個数を N とおくと，$TE = T + \sum_{i=1}^{N} S_i$ と書けるので，

$$\begin{aligned} &Pr\{TE \leq d\} \\ &= \int_0^T \sum_{j=0}^{\infty} H^{(j)}(d-T) \cdot Pr\{N=j \mid x<T\} dF(x) \\ &+ \int_T^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H^{(j)}(d-x) \cdot Pr\{N=j \mid x \geq T\} dF(x) \end{aligned}$$

ここで，右辺第2項の $Pr\{N=j \mid x \geq T\}$ は，$T_0 \geq T$ の場合なので簡単に求まるが，第1項の $Pr\{N = j \mid x < T\}$ に関しては，$M/M/1$ 待ち行列の過渡解 ([5] 参照) を使い，次のように求まる。

$$\begin{aligned} &Pr\{N=j \mid x<T\} \\ &= \sum_{v=i+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\mu+\lambda)(T-x)} \frac{(\mu(T-x))^n}{n!} \\ &\times \left\{ \frac{(\lambda(T-x))^{n+j+1-v}}{(n+j+1-v)!} - \frac{(\lambda(T-x))^{n+j-v}}{(n+j-v)!} \right. \\ &- \left. \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{(\lambda(T-x))^{n+j+1+v}}{(n+j+1+v)!} - \frac{(\lambda(T-x))^{n+j+v}}{(n+j+v)!} \right) \right\} \end{aligned}$$

また，$H(t) = 1 - e^{-\mu t}$ という仮定より，

$$H^{(j)}(d-T) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(\mu(d-T))^k}{k!} \quad .$$

2.2 M/G/1

次に，特急ジョブ発生間隔は，平均 $1/\lambda$ の指数分布のままであるが，その処理時間が一般分布 $H(t)$ の場合を考える。$T_0 \geq T$ のときは，時刻 T の時点で溜まっている特急ジョブの総処理時間は，そのときにある特急ジョブの処理時間の単純な合計である。一方，$T_0 < T$ のとき，時刻 T の時点で溜まっている特急ジョブの総処理時間の分布は，時刻 T_0 のときに溜まっている特急ジョブの総処理時間を x_0 とおくと，普通の $M/G/1$ 待ち行列システムで，時刻 0 に仕事量 x_0 であるという条件付きの時刻 $T-T_0$ における仕事量 $W(T-T_0)$ の分布 ([4] 参照) と同じである。したがって，この場合の達成確率は次のように書ける。

$$\begin{aligned} &Pr\{TE \leq d\} \\ &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \\ &\times \ Pr\{W(T-x) \leq d-T \mid W(0) = x_0\} \\ &\quad dH^{(i)}(x_0) dF(x) \\ &+ \int_T^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} H^{(i)}(d-T_0) dF(x) \end{aligned}$$

2.3 G/M/1

次に，特急ジョブの処理時間は，平均 $1/\mu$ の指数分布であるが，その発生間隔が一般分布 $G(t)$ である場合を考える。この場合も，$T_0 \geq T$ のときは，時刻 T の時点で溜まっている特急ジョブの総処理時間 $W(T)$ の分布は，簡単に求まる。

一方，$T_0 < T$ のときは，少し複雑である。まず，時刻 T_0 までに発生した特急ジョブの個数を j，時刻 T から次の特急ジョブ発生時刻までの時間を τ とおき，この間にその j 個の特急ジョブうちの k 個が処理されるという条件をつけて考えると，時刻 T のときに溜まっている特急ジョブの総処理時間 $W(T)$ の分布は，つぎのように得られる。

$$\begin{aligned} &Pr\{W(T) \leq t \mid T_0 < T\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} Pr\{W^*(T - T_0 - \tau) \leq t \\ &\quad \mid N(T_0) = j, N(T_0 + \tau_0) = j - k + 1\} \end{aligned}$$

ここで，$W^*(t)$ は，系内客数 j で時刻 $T_0 + \tau_0$ をあらためて時刻 0 と考えてスタートしたときの，ふつうの $G/M/1$ 待ち行列システムの時刻 t における仕事量の分布であり，[4] の結果より $x \geq 0$ に対して，次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &Pr\{W^*(t) \leq x \mid N^*(0) = k\} \\ &= \quad \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(x) \cdot Pr\{N^*(t) = j \mid N^*(0) = k\} \end{aligned}$$

また，ここで，$N^*(t)$ は，ふつうの $G/M/1$ 待ち行列システムの時刻 t における系内客数の分布であるが，$Pr\{N^*(t) = j \mid N^*(0) = k\}$ は，これも [4] により，Laplace transform の母関数の形であたえられている。以上のことから，この場合についての達成確率も求めることができる。

3. ゆとりの時系列とリスク管理

特急ジョブの発生時間間隔や処理時間についての分布が予想できるときは，ある程度，達成確率を求めることができることがわかった。さらに考えを進めて，作業開始から時間が経つにつれて，その時点での達成確率というものを定義することができる。このように考えると，現在時刻を τ として，達成確率 p を時間の関数 $p(\tau)$ と捉えることができる。すなわち，τ までにすでに起こった事象はヒストリーとして取り込み，時刻 τ 以降の事象について確率的に解析すればよい。もし，このような情報が刻々と現場で得られれば，達成確率に著しい減少が見られる場合，残業体制の用意をしたり，応援を配置することができると考えられる。ゆとりの管理は，リスク管理を裏側から支えるものであると考えている。

参考文献

[1] 三道弘明, ゆとりの数量的表現に関する一考察 (I), (II), 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 90-93, (2003).

[2] M. Pinedo, *Scheduling: Theory, algorithms, and systems, 2nd ed.*, Prentice Hall, New Jersey, (2002).

[3] B. J. Abumaizar and J. A. Svestka, Rescheduling job shops under random disruptions, *IJPR*, **35** (1997), pp. 2065.

[4] J.W.Cohen, *The single server queue, Revused ed.*, North-Holland, Amsterdam, (1982).

[5] N.U.Prabhu, *Queues and Inventories*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1965).