占有時間を使った $M^X/G/1$ 変形モデルの解析

01402130 東京都立大学　＊中塚利直　NAKATSUKA　Toshinao

1．モデルと目的

集団到着モデルは一見簡単そうに見えて、意外に解析が進んでいない。ここでは一集団内の客数分布の確率母関数（PGF）を $G(z)=\sum_{i=1}^{\infty} g_i z^i$ とした通常の $M^X/G/1$、並びに、その多くの変形モデルにおいて、系内客数の時間平均を PGF の形で求める。

本発表者は、一人到着の場合の $M/G/1$ の変形モデルにおいては、再生サイクル法が有効であることを示してきた。本発表では、この方法が、占有時間なる概念を導入することによって、集団到着でも有効であることを示すとともに、占有時間の形態が様々に考えられ、その面でもモデルの多様化が可能であることを示す。

従来、$M^X/G/1$ の系内客数を求めるには、セミ・マルコフ法が用いられてきたが、それはわかりにくいだけでなく、発展性に乏しいと思われる。ここでは、それに変わるものとして、累積過程の PGF を用い、マルコフ理論にはまったく依存しない論理展開を試みる。

2．再生サイクル法

再生サイクル法は、簡単で性質も良く分かっている再生過程（Regenerative process）をいくつか組み合わせて、複雑な確率過程を作っていく。あるいは逆に、一見複雑な確率過程を、単純な数種類の再生過程のサイクルに分割し、元の確率過程の諸性質をそれから導くものである。

有益な一般式としては、第 i 番の再生過程を $\Pi_i(z)$ とし、この再生過程が生起する直前の系内客数の分布を $\Pi^l(z:i)$ とする。また、このサイクルの長さの平均を θ_i、その生起頻度の比を α_i とすると、この確率過程の PGF は

$$\Pi(z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\theta_i\Pi^l(z:i)\Pi_i(z) \tag{1}$$

と表される。基礎となる再生過程として、一人到着ならば、$M/G/1$ の PGF $\Pi(z:M/G/1)$ と $M/G/1/MV$（多重休憩モデル）の PGF $\Pi(z:M/G/1/MV)$ を組み合わせて多くのモデルを表現できる。

3．$M/G/1$

$M/G/1$ を再生サイクル法で求めるには、空になってから次に空になるまでの再生サイクルを３つの部分に分ける。すなわち、空の部分、最初のサービス期間、その後の稼動期間の部分である。空の部分の PGF は $\Pi_1(z)=1$ である。サービス時間分布を $B(x)$, その平均と LST をそれぞれ b, $B^*(s)$ とすると、ポアッソン到着のインテンシティを λ とすると、最初のサービス時間上の PGF $\Pi_2(z)$ は

$$\Pi_2(z)=\frac{z(1-B^*(\lambda-\lambda z))}{\rho(1-z)}$$

となる。

最初のサービス時間に、p人が到着すれば、LIFOで考えると、稼動期間と同じ確率構造をもったサイクルがp個到着する。そこで稼動期間上のPGFを$\Pi(z:busy)$とすれば、(1)から

$$\Pi(z:busy)=\alpha_0 b\frac{z(1-B^*(\lambda-\lambda z))}{\lambda b(1-z)}+\alpha_1\frac{b}{1-\rho}\Pi^l(z:busy)\Pi(z:busy)$$

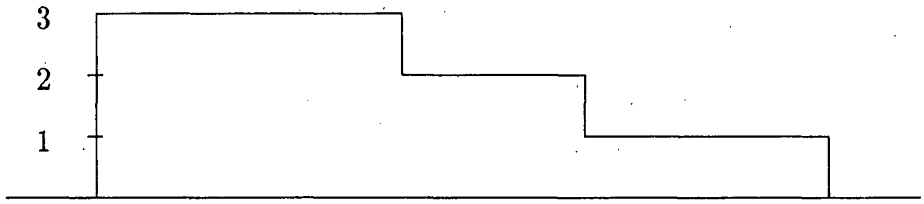
と書ける。α_0, α_1, $\Pi^l(z:busy)$を求めると、$\Pi(z:busy)$が求まり、これから、

$$\Pi(z:M/G/1)=\frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z}$$

が求まる。

4．集団到着と占有時間

集団到着モデル$M^X/G/1$を考えると、一つの集団のサービス開始時点からとぎ目なくその集団のサービスが行われるとして、その集団のサービス終了時点までをこの集団の占有時間と呼ぼう。そして、一人到着の場合、一人の客は一つのサービス時間を持ってくると考えられるように、一つの集団は次図のような、占有時間上の減少過程をもってくると考える。この図は3人が来た場合である。



占有時間の長さの分布を$O(x)$とし、その平均をb^O、LSTを$O^*(s)$とする。実際の占有時間には他の集団が到着するから、この到着も含んだ占有時間上のPGFを$\Pi(z:OT)$とする。これは

$$\Pi(z:OT)=z\frac{\big(G(z)-G(B^*(\lambda-\lambda G(z)))\big)\big(1-B^*(\lambda-\lambda G(z))\big)}{\rho g(1-G(z))(z-B^*(\lambda-\lambda G(z)))}$$

と表される。gは一集団内の客数平均である。$M/G/1$と同様にして

$$\Pi(z:M^X/G/1)=\frac{(1-\lambda gb)(1-z)B^*(\lambda-\lambda G(z))}{B^*(\lambda-\lambda G(z))-z}$$

が得られる。

以上のことはもっと一般的に論じることができる。すなわち、占有時間には、休憩時間が入ってもよく、客の分布が異なっていても良い。$\Pi(z:OT)$さえ求まっていればよい。そこで、占有時間をもった集団到着モデルを$M/OT/1$と表せば、

$$\Pi(z:M/OT/1)=(1-\lambda b^O)\Big(1+\frac{\lambda b^O(1-G(z))}{O^*(\lambda-\lambda G(z))-G(z)}\Pi(z:OT)\Big)$$

となることが分かった。