2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一般の待ちコストを持つ待ち行列システムへの最適参入問題

01107945　鳥取大学工学部　*小柳　淳二　KOYANAGI Junji
01103205　鳥取大学工学部　河合　一　KAWAI　Hajime

1　はじめに

本研究では、待ちを伴う仕事を行う場合、どのようなタイミングで待ち行列に並べばよいかを考える．このような研究は [1] では期待処理時間最小化を扱ったが、本研究では系内時間の２乗に待ちコストが比例するような場合など、やや一般のコスト構造を持つ場合に待ち行列に並ぶタイミングについて考察する．期待時間以外のコストを扱ったものとしては [2] で制限時間内に処理終了する確率の最大化問題があるが、離散時間待ち行列について扱ったもので本研究とは異なるシステムをあつかっている．

2　モデル

待ち行列に並ぶかどうかを決定するのに L 回の決定時点があり、決定時点ごとに待ち行列人数を観測して、各決定時点で待ち行列に並ぶか次の決定時点を待つかを決める．各決定時刻間隔は T で一定であるとする．k 回目の決定時点で次の決定時点を待つことにした場合、$c(k)$ のコストがかかり、待ち行列長は時間T の間に到着率 λ、処理率 μ の $M/M/1$ 待ち行列システム $(\lambda/\mu<1)$ にしたがって変化する．並ぶことにした場合、行列長 i に対して $A(i)$ のコストが課されて、決定は終了する．ただし L 回目の決定時点では行列に加わる決定だけができるものとする．

3　定式化

状態として k 回目の決定時点で 行列長 i を観測したとし、そのときの最適コストを $V(i,k)$ とする．このとき、行列に入ったときのコストは $A(i)$ であり、次の決定を待ったときのコストを $B(i,k)$ とする．これらは次の最適性方程式をみたす．
$k=1,\ldots,L-1$ に対して

$$B(i,k) = c(k)+\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}V(j,k+1) \quad (1)$$

$$V(i,k) = \min\{A(i),B(i,k)\} \quad (2)$$

$k=L$ に対して $V(i,L)=A(i)$

ここで P_{ij} は次の決定までの T 時間後に待ち行列人数が i から j に変化する確率である．

ここで以下の仮定をおく、

条件 1
待ちコスト $A(i)$ および 決定を延期することによるコスト $c(k)$ は以下の条件を満たす．

(1) $A(i), c(k)$ は i, k に関して増加

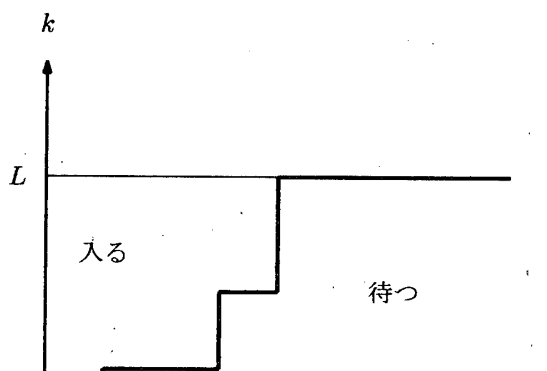
(2) $$\sum_{j=0}^{\infty}P_{i+1\,j}A(j)-\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}A(j) \le A(i+1)-A(i).$$

2. の条件は一回待つことにより行列長コストの人数に関する差が小さくなることを示す．

この仮定のもとで，最適政策は以下のような単調に変化する性質を持つことが証明できる．

定理 1
状態 (i,k) で行列に加わることが最適ならば，$j\le i,\ l\ge k$ となる状態 (j,l) でも行列に加わることが最適である．

すなわち下図のように状態空間は単調増大する関数で区切り，上側では行列に入り，下側では待つことが最適政策となる．



この定理の証明には以下の補題が必要となる．

補題 1

(1) $V(i,k)$, $B(i,k)$ は k に関して増加

(2) $V(i+1,k)-V(i,k) \le A(i+1)-A(i)$ かつ $B(i+1,k)-B(i,k) \le A(i+1)-A(i)$

証明.

L 回目の決定では行列に加わる決定のみとれるので $V(i,L)=A(i)$ となる. $V(i,L-1) \le A(i)$ なので $V(i,L) \le V(i,L-1)$, 以下

$$B(i,k+1)-B(i,k) = c(k+1)-c(k) + \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\{V(j,k+1)-V(j,k)\} \quad (3)$$

$$V(i,k) = \min\{A(i), B(i,k)\} \quad (4)$$

より k に関する帰納法により題意が証明できる.

2. を示すために $v(l,k)=V(l,k)-V(l-1,k)$ (ただし $V(-1,k)=0$) を定義する.

$$\begin{aligned}
&B(i+1,k)-B(i,k)\\
=\ & \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j}V(j,k) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j}V(j,k)\\
=\ & \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j}\sum_{l=0}^{j} v(l,k) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j}\sum_{l=0}^{j} v(l,k)\\
=\ & \sum_{l=0}^{\infty} v(l,k)\left(\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j}\right)\\
\le\ & \sum_{l=1}^{\infty}(A(l)-A(l-1))\left(\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j}\right)\\
=\ & \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j}A(j) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{i\,j}A(j)\\
=\ & A(i+1)-A(i)
\end{aligned}$$

ここで $M/M/1$ 待ち行列長の推移確率の性質 $\sum_{j=l}^{\infty} P_{i+1\,j} - \sum_{j=l}^{\infty} P_{i\,j} \ge 0$ を用いている.

定理の証明は以下のようになる.

状態 (i,k) で行列に加わることが最適ならば, $A(i) \le B(i,k)$ ここで $B(i,k) \le B(i,l)$ より $A(i) \le B(i,l)$ また補題の 2 の性質から $A(j)-A(i) \le B(j,l)-B(i,l)$ なので $A(j) \le B(j,l)$ が成立する. よって状態 (j,l) での最適アクションは行列に加わることである.

4 待ち行列長に関するコスト

待ち行列長に関するコストの条件

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i+1\,j}A(j) - \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}A(j) \le A(i+1)-A(i)$$

は以下のような場合に満たされる.

条件 2

$$\begin{aligned}
& A(i+2)-2A(i+1)+A(i)\\
\le\ & A(i+1)-2A(i)+A(i-1) \quad (A(-1)=0)
\end{aligned}$$

これは待ち行列長の推移確率行列 P_{ij} が行列 Q

$$Q_{00}=\mu/(\lambda+\mu),\ Q_{i\,i-1}=\mu/(\lambda+\mu),$$
$$Q_{ii}=0,\ Q_{i\,i+1}=\lambda/(\lambda+\mu)$$

を用いて

$$P_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \frac{(\lambda T+\mu T)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)nT} \quad (5)$$

とあらわされることより n に関する帰納法で証明することができる.

条件 2 は $A(i)$ が待ち行列長に比例するような場合 (期待処理時間) や $A(i)=(i+1)^2$ のようにコストが待ち行列長 (自分も含めた) の 2 乗であらわされる場合には満たされている. 他にどのようなコストなら条件 1 が成立しているか調べている. また [1] では $A(i)$ が k の関数 $A(i,k)$ になっているような場合を取り扱ったが, 本モデルでもそのような拡張が可能かどうかも課題である.

参考文献

[1] 待ち行列への最適参入時期問題 –ジョブ数が確率的な場合 –, 1998 年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集 pp. 80–81.

[2] 行列長に依存した到着確率を持つ待ち行列における仕事終了確率最大化問題, 2002 年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集 pp. 82–83.