左飛び越しのない連続時間2変数マルコフ連鎖の過渡解に対するアルゴリズム的解析

02602394 京都大学大学院 情報学研究科 *増山 博之 MASUYAMA Hiroyuki
01306754 京都大学大学院 情報学研究科 滝根 哲哉 TAKINE Tetsuya

1. はじめに

従来, M/M/1 待ち行列の過渡解析には母関数やラプラス変換が用いられ, その結果得られた過渡解は Bessel 関数などを用いた非常に複雑な表現をしており, 数値計算には適さないものであった. 近年, Le Ny [2] らによって BMAP/PH/1 待ち行列の過渡客数分布を計算するアルゴリズムが提案されたが, 彼らのアルゴリズムは一様化手法 [3] を用いて得られた再帰式から直接的に構築されたものであり, 実装は容易であるが計算効率は良いとは言えない. そこで, 本研究では, 一様化手法を用いると共に, 最終的な計算結果への貢献が小さい要素の計算を省くことで, 左飛び越しのない連続時間 2 変数マルコフ連鎖の過渡解を効率よく計算するアルゴリズムを提案する.

2. 左飛び越しのない連続時間2変数マルコフ連鎖

本研究では以下の性質をもつ連続時間 2 変数マルコフ連鎖 $\{(X_t, S_t(X_t));\ t \ge 0\}$ を考察する. このマルコフ連鎖の状態空間は $\bigcup_{n\ge0}\{(n,1),\dots,(n,M_n)\}$ $(M_n \ge 1)$ で与えられる. さらに, X_t には左飛び越しがない, すなわち, $n-m \ge 2$ のとき, 任意の t に対して $X_{t-}=n$, $X_t = m$ となる推移は起こらないとする. 以下では, 状態を次のように辞書式順序で並べ, 状態集合 $\mathcal{L}_n = \{(n,1),\dots,(n,M_n)\}$ をレベル n と呼ぶ.

$$(0,1),\dots,(0,M_0),(1,1),\dots,(1,M_1),(2,1),\dots$$

このとき, 連続時間 2 変数マルコフ連鎖 $\{(X_t,S_t(X_t));\ t\ge0\}$ の無限小作用素 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ は次のような構造を持つ.

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{0,0} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{0,1} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{0,2} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{0,3} & \cdots \\ \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1,0} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1,1} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1,2} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1,3} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{2,0} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{2,1} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{2,2} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{3,0} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{3,1} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{4,0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3. 過渡解に対する再帰式

$\boldsymbol{\pi}_m(t)$ を $1 \times M_m$ ベクトルとし, その j 番目の要素は $\Pr[X_t = m, S_t(X_t) = j]$ を表すものとする. ここで, $\boldsymbol{\pi}(t) = (\boldsymbol{\pi}_0(t), \boldsymbol{\pi}_1(t), \dots)$ とすると, 形式的に

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\exp(\widetilde{\boldsymbol{Q}}t), \qquad t \ge 0 \tag{1}$$

を得る. 以下では, 次のような仮定をおく.

仮定 1 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ の全ての対角成分の絶対値は有界である.

これは $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ の全ての成分が上界値をもつことを意味している. 一様化手法 [3] を (1) に適用すると,

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}[\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}]^k$$

を得る. ここで $\boldsymbol{Q}_{n,m}^{(k)}$ $(n,m,k \ge 0)$ を, レベル n からレベル m への遷移に関連付けられた $[\boldsymbol{I}+\theta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}]^k$ の (n,m)-ブロック行列とする. さらに, $\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k)}$ $(n,m,k\ge0)$ を次式で定義する.

$$\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\pi}_n(0)}{\boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}}\boldsymbol{Q}_{n,m}^{(k)}, & \text{if } n \in \mathcal{Z}_{\text{comp}} \\ \boldsymbol{0}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし, $\mathcal{Z}_{\text{comp}} = \{n \mid \boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e} > 0, n \ge 0\}$.

定理 1 $\boldsymbol{\pi}_m(t)$ $(m \ge 0)$ は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\pi}_m(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}_{\text{comp}}} \boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k)}$$

ここで, 各 n $(n \in \mathcal{Z}_{\text{comp}})$ に対して, 列 $\{\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k)}\}$ は以下のようにして再帰的に決定される.

$$\boldsymbol{q}_{n,m}^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\pi}_n(0)}{\boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}}, & \text{if } m = n \\ \boldsymbol{0}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに, $k = 0,1,\dots$ に対して,

$$\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k+1)} = \boldsymbol{q}_{n,0}^{(k)}\boldsymbol{Q}_{0,m} + \sum_{\nu=1}^{m+1}\boldsymbol{q}_{n,\nu}^{(k)}\boldsymbol{Q}_{\nu,m+1-\nu}, \quad m \ge 0$$

とする. ただし, $\boldsymbol{Q}_{n,m}$ は次式で決定される.

$$\boldsymbol{Q}_{n,m} = \begin{cases} \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n,m}, & \text{if } n = m = 0, \\ & \text{or } n \ge 1 \text{ and } m = 1 \\ \theta^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n,m}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. アルゴリズム

本節では, 前節の結果に基づき, 過渡解 $\boldsymbol{\pi}(t) = (\boldsymbol{\pi}_0(t), \boldsymbol{\pi}_1(t), \dots)$ に対する近似解 $\check{\boldsymbol{\pi}}(t) = (\check{\boldsymbol{\pi}}_0(t), \check{\boldsymbol{\pi}}_1(t), \dots)$ を計算するアルゴリズムについて述べる. 定理 1 から分かるように $\boldsymbol{\pi}_m(t)$ の計算には加算無限個の $\boldsymbol{q}_{n,m}^{(k)}$ が必要とされる. そこで, 我々は目標の計算精度を達成する

上で, 貢献の小さい $q_{n,m}^{(k)}$ を無視することによって, 無限列 $\{q_{n,m}^{(k)}\}$ を近似する有限列 $\{\check{q}_{n,m}^{(k)}\}$ を構成し, さらにその $\{\check{q}_{n,m}^{(k)}\}$ を用い, 任意に固定された $t>0$, $0<\varepsilon\ll 1$ に対して, 下記の条件 (2), (3) をみたす近似解 $\check{\boldsymbol{\pi}}(t)=(\check{\boldsymbol{\pi}}_0(t),\check{\boldsymbol{\pi}}_1(t),\ldots)$ を生み出すアルゴリズムを構築した.

$$\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)=\boldsymbol{0},\quad \text{if } m<\underline{M} \text{ or } \overline{M}<m \tag{2}$$

$$\sum_{m=\underline{M}}^{\overline{M}}\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)>1-\varepsilon \tag{3}$$

ここで, $\underline{M}$ 及び $\overline{M}$ は提案するアルゴリズムによって決定される非負整数である.

以下では提案するアルゴリズムについてより詳しく述べる. そこでまず, 次の仮定をおく.

仮定 2 $\mathcal{Z}_{\mathrm{comp}}$ 有限集合であり、その要素数は N とする.

近似列 $\{\check{q}_{n,m}^{(k)}\}$ を定義するために, いくつかの表記を導入する. ある正定数 a $(a<1)$ に対して,

$$\psi(n)=-\frac{a}{\theta t}\log\left(1-\frac{\varepsilon}{N\boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}}\right)$$

とし, さらに, $\underline{K}(n)$ 及び $\overline{K}(n)$ $(n\in\mathcal{Z}_{\mathrm{comp}})$ はそれぞれ

$$\sum_{k=\underline{K}(n)}^{\overline{K}(n)}\exp\left[-\theta t(1-\psi(n))\right]\frac{\{\theta t(1-\psi(n))\}^k}{k!}>1-\sigma(n) \tag{4}$$

をみたす非負整数とする. ただし, $\sigma(n)$ は次式で与えられる.

$$\sigma(n)=1-\exp\left[-\theta t\psi(n)\left(\frac{1}{a}-1\right)\right]$$

注意 1 (4) をみたす 2 つの非負整数の組 $(\underline{K}(n),\overline{K}(n))$ は複数存在する. それらのうち適当な一組を見つけるアルゴリズムが Fox と Glynn [1] によって提案されている.

さらに, $\underline{m}(n)$ 及び $\overline{m}(n)$ をそれぞれ

$$\sum_{m=0}^{\underline{m}(n)}\boldsymbol{Q}_{n,m}\boldsymbol{e}\geq\frac{\psi(n)}{2}\boldsymbol{e},\quad \sum_{m=\underline{m}(n)}^{\overline{m}(n)}\boldsymbol{Q}_{n,m}\boldsymbol{e}>(1-\psi(n))\boldsymbol{e}$$

をみたす最小の非負整数とする.

さて, これから近似列 $\{\check{q}_{n,m}^{(k)}\}$ を定義する. まず, $k=0$ に対しては

$$\check{q}_{n,m}^{(0)}=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\pi}_n(0)}{\boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}}, & \text{if } m=n\\ \boldsymbol{0}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする. $k\geq 1$ の場合は以下のように再帰的に定義する. まず, $\widehat{q}_{n,m}^{(k)}$ $(m\geq 0)$ を

$$\widehat{q}_{n,m}^{(k)}=\check{q}_{n,0}^{(k-1)}\check{\boldsymbol{Q}}_{0,m}+\sum_{\nu=1}^{m+1}\check{q}_{n,\nu}^{(k-1)}\check{\boldsymbol{Q}}_{\nu,m+1-\nu}$$

と定義する. ただし,

$$\check{\boldsymbol{Q}}_{n,m}=\begin{cases}\boldsymbol{Q}_{n,m}, & \text{if } \underline{m}(n)\leq m\leq\overline{m}(n)\\ \boldsymbol{O}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする. また, $\underline{m}^{(k)}(n)$ 及び $\overline{m}^{(k)}(n)$ をそれぞれ,

$$\sum_{m=\max(n-k,0)}^{\underline{m}^{(k)}(n)}\widehat{q}_{n,m}^{(k)}\boldsymbol{e}\geq\frac{1}{2}\left[(1-\psi(n))\sum_{m=\underline{m}^{(k-1)}(n)}^{\overline{m}^{(k-1)}(n)}\check{q}_{n,m}^{(k-1)}\boldsymbol{e}-(1-\psi(n))^k\right]$$

$$\sum_{m=\underline{m}^{(k)}(n)}^{\overline{m}^{(k)}(n)}\widehat{q}_{n,m}^{(k)}\boldsymbol{e}>(1-\psi(n))^k$$

をみたす最小の非負整数とする. このとき, $\check{q}_{n,m}^{(k)}$ $(k\geq 1)$ を次のように定義する.

$$\check{q}_{n,m}^{(k)}=\begin{cases}\widehat{q}_{n,m}^{(k)}, & \text{if } \underline{m}^{(k)}(n)\leq m\leq\overline{m}^{(k)}(n)\\ \boldsymbol{0}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

最後に, $\underline{M}$ 及び $\overline{M}$ を

$$\underline{M}=\min\{\underline{m}^{(k)}(n)\mid n\in\mathcal{Z}_{\mathrm{comp}},\underline{K}(n)\leq k\leq\overline{K}(n)\}$$
$$\overline{M}=\max\{\overline{m}^{(k)}(n)\mid n\in\mathcal{Z}_{\mathrm{comp}},\underline{K}(n)\leq k\leq\overline{K}(n)\}$$

とし, 上記の近似列 $\{\check{q}_{n,m}^{(k)}\}$ を用いて $\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)$ を次のように定義する. $\underline{M}\leq m\leq\overline{M}$ のとき,

$$\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)=\sum_{n\in\mathcal{Z}_{\mathrm{comp}}}\boldsymbol{\pi}_n(0)\boldsymbol{e}\sum_{k=\underline{K}(n)}^{\overline{K}(n)}e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}\check{q}_{n,m}^{(k)} \tag{5}$$

とし, その他の場合は全て $\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)=\boldsymbol{0}$ とする. このとき, 近似解 $\check{\boldsymbol{\pi}}(t)=(\check{\boldsymbol{\pi}}_0(t),\check{\boldsymbol{\pi}}_1(t),\ldots)$ に関して次の結果を得る.

定理 2 (5) で与えられる $\check{\boldsymbol{\pi}}_m(t)$ $(\underline{M}\leq m\leq\overline{M})$ は (3) をみたす.

参考文献

1. B. L. Fox and P. W. Glynn, Computing Poisson Probabilities, Comm. ACM, 31 (1988) 440-445.
2. L. M. Le Ny and B. Sericola, Transient analysis of the BMAP/PH/ queue, International Journal of Simulation 3 (2002) 4-14.
3. H. C. Tijms, *Stochastic Model: An Algorithmic Approach* (John Wiley & Sons, Chichester, 1994).