2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

探知確率尺度の多段捜索割当ゲーム

01504810　防衛大学校　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1．はじめに

捜索者及び逃避者が参加する捜索ゲームにおいて，捜索空間上を移動しつつ捜索者を回避しようとする逃避者と，移動しつつ逃避者を見つけようとする捜索者の問題は，各時点における両プレイヤーの位置によって決まる支払いの自然な解釈が可能であるため（例えば，同じ位置を選択した場合を探知と定義する等々），これを多段ゲームにモデル化した研究は比較的多い [1]．これに対し，捜索者の戦略が手持ちの捜索資源配分である”捜索割当ゲーム”[2] と呼ばれる問題は，資源配分問題が one-sided な問題として長く研究されてきた経緯からゲームとして扱われることも少なく，まして多段ゲーム化された研究はあまりない．本報告では，捜索理論では基本的な評価尺度である探知確率尺度の下で，多段捜索割当ゲームについて議論する．

2．モデルの記述と問題の定式化

捜索者と目標が参加する次のような多段確率ゲームを考える．捜索空間は離散的なセル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ から成り，捜索時間としては，捜索終了時刻を0とし，残り時点数によって表される離散時間を考える．

捜索者は，総捜索予算制約の下で捜索資源を各セルに投入することにより目標探知に努める．一方，目標は，ある移動制約の下でセル間を移動することにより捜索者の探知を逃れようとする．プレイヤーの戦略，情報集合及び支払いとゲームの進行は以下のとおりである．(1) 各時点 n の当初において，捜索者は，目標の現に存在するセル k と残存エネルギー量を知ることができる．一方，目標は，捜索者の過去の捜索資源配分及びそれまでに使用した予算を知る．(2) その後，目標はセル k からの移動を確率的に決定するが，セル k から次に移動できるセル群として $N(k)\subseteq\boldsymbol{K}$ の制約がある．さらに，セル i, j 間の移動ではエネルギー $\mu(i,j)$ が消費され，手持ちエネルギーを越える移動はできない．ただし，$i\neq j$ に対し $\mu(i,j)>0$ であり，また $\mu(k,k)=0$ とし，エネルギーを消耗しても現に存在するセルに滞在し続けることは可能である．目標の保有する初期エネルギーを e_0 とする．(3) 捜索者は，次の時点における目標の移動セルを推理しつつ手持ちの残存捜索予算内で各セルへの資源配分量を決定する．単位資源量をセル i へ投入するにはコスト $c_i>0$ が必要とされる．捜索者の初期捜索予算は Φ_0 である．(4) 目標がセル i に移動した場合，そのセルに投入された捜索資源量 x により，捜索者は目標を確率 $1-q_i(x)$ で探知できる．非探知確率は $q_i(x)=\exp(-\alpha_i\,x)$ で与えられる．パラメータ $\alpha_i>0$ はセル i における単位捜索資源投入の探知効率を表す．目標が探知された場合，捜索者は利得1を得，目標は同量を失い捜索は終了する．(5) 時点 n で目標探知がなければ，時点は1つ進み $n-1$ となる．

目標が探知された時点，または最終時点 $n=0$ に到達すれば捜索は終了する．捜索者はこの多段ゲームのマキシマイザーとして，目標はミニマイザーとして行動する．

問題は，探知確率尺度の多段確率ゲームである．セル k に存在し残存エネルギー e を保有する目標がとる戦略を $\{p(k,i),i\in\boldsymbol{K}\}$ で表す．ただし，$p(k,i)$ は次にセル i に移動する確率である．この目標が次に移動可能なセル群は $N(k,e)\equiv\{i\in N(k)|\mu(k,i)\leq e\}$ で表せるから，その実行可能領域は

$$P_k(e)=\left\{\{p(k,i),i\in\boldsymbol{K}\}\;\middle|\;p(k,i)\geq 0,i\in N(k,e),p(k,i)=0,i\in\boldsymbol{K}-N(k,e),\sum_{i\in N(k,e)}p(k,i)=1\right\}$$

となる．一方，時点 n において残存予算 Φ をもつ捜索者の資源配分計画を $\{\varphi(i,n),i\in\boldsymbol{K}\}$ で表す．ただし，$\varphi(i,n)$ はセル i への投入捜索資源量である．捜索者は目標の現在セル k を知っているため，戦略の実行可能領域 $\Psi(\Phi)$ は次式で与えられる．

$$\Psi(\Phi)=\left\{\{\varphi(i,n),i\in\boldsymbol{K}\}\;\middle|\;\varphi(i,n)\geq 0,i\in\boldsymbol{K},\ \varphi(i,n)=0,i\in\boldsymbol{K}-N(k,e),\sum_{i\in N(k,e)}c_i\varphi(i,n)\leq\Phi\right\}.$$

時点 n の当初において残存エネルギー e を持ちセル k に存在する目標と捜索予算 Φ を持つ捜索者によるこの時点以降のゲームの値が存在すると仮定し，これを $v(n,k,e,\Phi)$ とおく．目標が確率 $p(k,i)$ でセル i に移動した場合，捜索者の資源投入 $\varphi(i,n)$ により確率 $1-q_i(\varphi(i,n))$ で目標は探知され，探知されなければ次のステージへ移行する

が，その場合，状態 (セル, 残存エネルギー) $= (i, e-\mu(k,i))$ をもつ目標と残存予算 $\Phi - \sum_{i\in N(k,e)} c_i\varphi(i,n)$ をもつ捜索者との時点 $n-1$ 以降のゲームへと遷移する．このことから，その存在を仮定したゲームの値 $v(n,k,e,\Phi)$ は

$$\max_{\varphi\in\Psi(\Phi)} \min_{p\in P_k(e)} \sum_{i\in N(k,e)} p(k,i)\left\{(1-q_i(\varphi(i,n)))+q_i(\varphi(i,n))v(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\sum_{i\in N(k,e)} c_i\varphi(i,n))\right\}$$

から得られるが，$h(n,k,e,\Phi)\equiv 1-v(n,k,e,\Phi)$ の置き換えにより次のような取り扱い易い漸化式となる．

$$h(n,k,e,\Phi)=\min_{\varphi\in\Psi(\Phi)} \max_{p\in P_k(e)} \sum_{i\in N(k,e)} p(k,i)\cdot h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\textstyle\sum_j c_j\varphi(j,n))\cdot \exp(-\alpha_i\varphi(i,n)). \quad (1)$$

$$\text{初期条件・境界条件：}\ h(0,k,e,\Phi)=1,\ \ h(n,k,e,0)=1,\ h(n,k,0,\Phi)=\exp(-\alpha_k\Phi/c_k)\ . \quad (2)$$

3．ゲームの解

詳細は省くが，ゲームの値に関して次のような定理が成り立つ．

定 理 1 ゲームの値 $h(n,k,e,\Phi)$ は常に存在し，次式のような表現形をもつ．

$$h(n,k,e,\Phi)=\exp(-\Phi/\gamma_n(k,e))\ . \quad (3)$$

n, k, e のみに依存した係数 $\gamma_n(k,e)$ 及び時点 n における最適戦略 $\varphi^*(i,n)$, $p^*(k,i)$ は次により与えられる．まず，前ステージにおける $\{\gamma_{n-1}(j,e-\mu(k,j)),\ j\in N(k,e)\}$ の値を降下順に並べたものを $\gamma_{n-1}(k_1,e-\mu(k,k_1))\geq \gamma_{n-1}(k_2,e-\mu(k,k_2))\geq\cdots\geq\gamma_{n-1}(k_m,e-\mu(k,k_m))$ （m は，$N(k,e)$ のセル数 $|N(k,e)|$）とする．

(i) $1>\sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i/\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))$ ならば，$\gamma_n(k,e)=\displaystyle\sum_{i\in N(k,e)}\frac{c_i}{\alpha_i}$ であり，

$$\varphi^*(i,n)=\frac{\Phi/\alpha_i}{\sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j},\ i\in N(k,e)\ ,\quad p^*(k,i)=\frac{c_i/\alpha_i}{\sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j},\ i\in N(k,e)\ .$$

(ii) そうでなければ，$s_n^*=\min\left\{s\ \middle|\ 1\leq\displaystyle\sum_{\tau=1}^{s}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau,e-\mu(k,k_\tau))}\right\}$ なる $s_n^*\in\{1,\cdots,m\}$ により，

$$\begin{aligned}
\gamma_n(k,e) &= \gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*}))\left(1-\sum_{\tau=1}^{s_n^*-1}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau,e-\mu(k,k_\tau))}\right)+\sum_{\tau=1}^{s_n^*-1}\frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}}\\
\varphi^*(i,n) &= \frac{\Phi/\alpha_i}{1+\eta_{n-1}(k,s_n^*,e)}\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*}))}-\frac{1}{\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))}\right),\ i\in\{k_1,\cdots,k_{s_n^*}\}\\
p^*(k,i) &= c_i/\alpha_i\Big/\sum_{\tau=1}^{s_n^*}c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}\ ,\ i\in\{k_1,\cdots,k_{s_n^*}\}\ .
\end{aligned}$$

ただし，$\eta_{n-1}(k,s,e)\equiv\dfrac{\sum_{\tau=1}^{s-1}c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_s,e-\mu(k,k_s))}-\displaystyle\sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau,e-\mu(k,k_\tau))}$ である．

$n=1$ に対する $\gamma(\cdot)$ の初期値は，$\gamma_1(k,e)=\displaystyle\sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j$ とする．

係数 $\gamma_n(k,e)$ は，残りステージ数 n，目標のセル k とその残存エネルギー e を考慮した上で，捜索予算 Φ が非探知確率という評価尺度に関してもつ効率性を示す総合指数となっており，次のような性質をもつ．

系 1 *(i)* ステージ数 n に対し単調非増加性をもつ．すなわち，$\gamma_n(k,e)\geq\gamma_{n+1}(k,e)$.

(ii) 定理 *1* において値の降下順に整列させた $\gamma_{n-1}(k_s,e-\mu(k,k_s))$, $s=1,\cdots,m$ に関し，ステージ数 n に対する単調非増加性が成り立つ．すなわち，$\gamma_n(k_s,e-\mu(k,k_s))\geq\gamma_{n+1}(k'_s,e-\mu(k,k'_s))$, $s=1,\cdots,m$.

参考文献

[1] A.R. Washburn, *Operations Research*, **28**, pp.1290-1298, 1980.
[2] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, *JORSJ*, **45**(1), pp.93-108, 2002.
[3] R. Hohzaki and A.R. Washburn, *JORSJ*, **46**(3), 2003(to appear).