発見率が時間的に変化する場合の最適探索

入会申請中　関西大学　＊樋口 修平　HIGUCHI Shuhei
01401144　関西大学　中井 暉久　NAKAI Teruhisa

1.　研究背景と目的

何か目標物を探索する際、どこでもいいから適当に探すということはまずあり得ない。最終目的は目標物を発見することであるから、最も発見できそうな領域から探すのが普通である。さらに探索に必要な努力（資材・資源・人的要素・コスト）を考慮に入れると、出来るだけ少ない努力で、発見確率を最大にするのが理想である。このような問題を解決するために生まれたのが探索理論である。先行研究では、探索に要するコストの最小化や、期間内での発見確率の最大化があるが、いずれも発見率が一定である条件のもとで考えられていた。しかし、実際の探索活動において、地勢の変化や天候の変化などにより、時間的に各領域の発見率は変化すると考えられる。今回の研究ではこの点に着目し、より現実的なモデルを作成し、最適な探索努力配分を求める。

2．モデル

静止した目標物が１つ、n 個の領域のどこかに存在し、各領域での存在確率は異なり、発見率（発見のし易さ）は時間的に変化する条件（時間的変化は事前に分かっており狭義単峰関数とする）の下で探索する。また、目標物は各領域内では一様に分布していて、探索者がそこを探すときはランダムに探索するものとする。
従って、目標物が領域 i に存在して、i での発見率関数が $\lambda_i(t)$ のとき、時間区間 $[t, t+\Delta]$ で領域 i に $x_i(t)\Delta$ の努力を投入したときのその時間区間での発見確率は $\lambda_i(t)x_i(t)\Delta+o(\Delta)$ である。これより指数型発見関数 $1-\exp[-\int_0^T \lambda_i(t)x_i(t)dt]$ (T までに発見する確率)を得る。

［文字の定義］

p_i: 目標物が領域iに存在する確率

$$0 \le p_i \le 1 \quad (i=1,\dots,n); \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

$\lambda_i(t)$: 領域i での時刻tにおける発見率

$$\lambda_i(t) \ge 0 \quad (0 \le t \le T; \quad i=1,\dots,n)$$

a: 各時刻での最大努力投入率　$(0<a<\infty)$

T: 探索終了時刻　$(0<T<\infty)$

A: 手持ち総努力量 $(0<A<naT)$

$x_i(t)$: 領域i での時刻tにおける探索努力投入率

$x=(x_1(t),\dots,x_n(t) \mid 0 \le t \le T)$ が探索政策である。

［定式化］

$$(\mathrm{P})\begin{cases} P[x] \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i\left(1-e^{-\int_0^T \lambda_i(s)x_i(s)ds}\right) \to \max_x \\ s.t. \\ \sum_{i=1}^{n} \int_0^T x_i(t)dt = A \\ 0 \le x_i(t) \le a \quad (0 \le t \le T; \quad i=1,\cdots,n) \end{cases}$$

問題(P)は、総探索努力量の制限と時刻 t での投入率の制限を制約条件としたとき、時刻 T までに目標物を発見できる確率を最大化するものである。

3. 理論解析

［定理］探索政策 $x^*=\{x_1^*(t),\dots,x_n^*(t) \mid 0 \le t \le T\}$ が最適であるための必要条件は、ある定水準(constant level) $\xi^*(>0)$ が存在して、次の関係が成り立つことである。

$$H_i(t \mid x^*)\begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix}\xi^* \qquad if \begin{Bmatrix} x_i^*(t)=0 \\ 0<x_i^*(t)<a \\ x_i^*(t)=a \end{Bmatrix}$$

ここに　$H_i(t \mid x) = p_i\lambda_i(t)\exp[-\int_0^T \lambda_i(s)x_i(s)ds]$

である。ξ^* は制約条件より決定される。

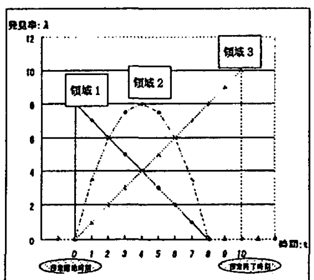
条件より $H_i(t \mid x^*)$ は狭義単峰関数となり $H_i(t \mid x^*)=\xi^*$ の２解を $\alpha_i, \beta_i (\alpha_i \leqq \beta_i)$ とすると、(解をもたない or 重解の可能性あり)次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} p_i\lambda_i(\alpha_i)e^{-a\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\lambda_i(s)ds} = \xi^* & (i=1,\cdots,n) \\ \lambda_i(\alpha_i)=\lambda_i(\beta_i) & (i=1,\cdots,n) \\ a\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)=A \end{cases}$$

$\alpha_i, \beta_i (i=1,\dots,n), \xi^*$ について解く。

4. 数値計算

数値計算データとして領域数 n=3 とし、p_i, λ_i, T, a を以下のように与えた。



グラフ１　各領域の発見率関数

領域数：$n=3$

存在確率：$p_1=\frac{1}{2}, \quad p_2=\frac{1}{3}, \quad p_3=\frac{1}{6}$

各時刻での最大投入速度：$a=0.01$

探索終了時刻：T=10

発見率関数：

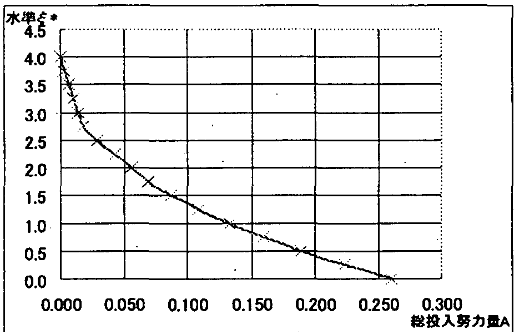
$$\lambda_1(t)=\begin{cases} 8-t & 0 \le t \le 8 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad \lambda_2(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t(8-t) & 0 \le t \le 8 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad \lambda_3(t)=\begin{cases} t & 0 \le t \le 10 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

数値計算結果をまとめたものが以下の表１である。

表 1. 総探索努力量 A の最適配分と水準ξ*との関係

A	ξ*	α1	β1	α2	β2	α3	α3
0.2600	0.000	0	8	0	8	0	10
0.2232	0.250	0	7.31	0.30	7.70	2.40	10
0.1893	0.500	0	6.64	0.61	7.39	4.47	10
0.1594	0.750	0	5.98	0.95	7.05	6.14	10
0.1328	1.000	0	5.34	1.29	6.71	7.48	10
0.1087	1.250	0	4.74	1.65	6.35	8.57	10
0.0866	1.500	0	4.16	2.01	5.99	9.47	10
0.0727	1.667	0	3.80	2.26	5.74	10	10
0.0684	1.750	0	3.62	2.39	5.61		10
0.0556	2.000	0	3.11	2.78	5.22		10
0.0426	2.250	0	2.63	3.19	4.81		10
0.0290	2.500	0	2.19	3.65	4.35		10
0.0190	2.667	0	1.90	4.00	4.00		10
0.0176	2.750	0	1.76				10
0.0137	3.000	0	1.37				10
0.0100	3.250	0	1.00				10
0.0064	3.500	0	0.64				10
0.0031	3.750	0	0.31				10
0	4.000	0	0.00				10

この結果よりＡとξ*の関係をグラフ化したものが以下のグラフ２である。



グラフ2. 総探索努力Aの最適配分と水準ξ*の関係

5. 結果のまとめ

- 手持ち総探索努力量 A が与えられれば、ある一定水準ξ*の値は求められる。ξ*が決まれば努力を投入すべき領域数, 時間区間も決まり、それぞれの領域に配分される努力　$\chi_i^*=\alpha(\beta_i-\alpha_i)$　が決まる。χ_i^*の値はそれぞれの領域の探索に必要な最適投入努力であり、最適政策は　$x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ となる。
- ある領域を探索するかしないかは、
  $$H_i(t\mid x^*)\left(=p_i\lambda_i(t)\exp[-\int_0^T\lambda_i(s)x_i^*(s)ds]\right)$$
  とξ*の関係によって決まる。すなわち、それぞれの領域における$H_i(t\mid x^*)$の値がξ*の値を超えるならば、探索努力を投入し、超えないのならば探索費用を投入しない。
- 発見率関数がすべて狭義単峰ならば、最適政策は全く努力投入しないか、投入するならば最大投入率で投入するというタイプ（すなわち bang-bang 制御である）になる。
- 定水準ξ*の値は手持ち総探索努力量Ａに対して単調減少であり、手持ち総探索努力量 A が増えると水準ξ*が下がり、探索すべき領域数、時間区間が増える。
- 各領域において発見率が一定の場合
  （$\lambda_i(t)=\lambda_i,\quad x_i(t)=x_i$）も、手持ち総費用Ａが決まれば、探索領域および最適努力配分を決定する狭義単調減少関数が得られる。これは先行研究でも知られている発見率の時間的変化を考慮しないモデルと一致する。

5. 結論

総探索努力量が決まれば水準が決まり、どの領域、どの時間区間にどのような割合で配分すれば良いか明らかになる。
また、総探索努力量が増えれば、水準は低くなる。
発見率関数が全て単峰ならば最適政策は投入しないか、投入するなら最大投入率で投入するというタイプになる。

6. 今後の展望

本研究では発見率関数が狭義単峰関数に限定し、その時間的変化は事前に明らかである場合のモデルを作成したが、残された課題として、発見率関数が多峰関数などの複雑な関数の場合や時間的変化が不確実な場合について、また、様々な諸条件（目標物・探索者の数、目標物の運動など）を考慮にいれることや目的関数を発見までの総努力量の最小化とした場合などが考えられる。

7. 参考文献

[1] 多田 和夫：探索理論, 日科技連, 1973
[2] 中井 暉久：探索理論展望(技苑第 61 号 p 20), 関西大学工業技術研究所, 1989
[3] 河村 哲也：数値計算の初歩, 山海堂, 2002
[4] 飯田 耕司：捜索オペレーションの数理, MORS 会, 1998
[5] Koopman,B.O.: The theory of search II. Target detection,Opns.Res., Vol.4(1956), pp.324-346, pp.503-531
[6] Koopman,B.O.:The theory ofsearch;III.the optimal distribution of serching effort,, Opns.Res.,Vol.5(1957),pp.613-626
[7] Dobbie,J.M.:Search theory; A sequential approach,Naval Res.Log.Quart.,Vol.10(1963),pp.323-324