リーグ戦の対戦組合せとホームアウェイ付け可能性について

02203000　筑波大学システム情報工学研究科　*鈴鹿 順美　SUZUKA Ayami
01206100　筑波大学社会工学系　猿渡 康文　SARUWATARI Yasufumi
01703540　筑波大学社会工学系　吉瀬 章子　YOSHISE Akiko

1 はじめに

リーグ戦形式で行われる各種スポーツ競技のスケジュールとは，各試合開催日 (期と呼ぶ) に対する「対戦組合せ」と「開催地」の割当てから成る．シーズンを通してのスケジュールを決定する問題を，リーグ戦スケジューリング問題と呼ぶ [2, 3]．しかし，既存の研究は主に実務的な側面に注目しており，リーグ戦のスケジューリング問題の理論的な性質には未解明な部分が多く残されている．

本論文では，スケジュールを構成する対戦組合せが持つ構造を調べるために，ホームアウェイ付け問題という判定問題を定義し，特に各対戦の開催期と開催間隔から，対戦組合せの特徴付けを行う．

2 ホームアウェイ付け問題

参加チーム数が偶数 ($2n$) であるリーグの1シーズン分の各期の対戦組合せ (トーナメントチャート:TC) が入力として与えられるとする．TC は以下の C.1–C.4 を満たすものとする．

C.1 各チームは各期に1ゲームずつ行う．

C.2 各チームは全てのチームと2回戦ずつ行う．

C.3 同じ相手との対戦は3期以上の間隔を置く．

C.4 周期性をもつ．

ここで，周期性をもつとは，シーズンの末期と初期を連結したと仮定した場合にも，C.1–C.3 が全て満たされなければならないことを意味する．すなわち，末期から初期にかかるような3期間についても，C.1–C.3 を考慮しなければならない．

TC は各行をチームインデックス，各列を期とし，各チームの各期の対戦相手のチームインデックスを要素

表 1: TC 例 ($2n=6$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	2	3	5	6	4	5	6
2	1	5	6	1	4	3	5	6	4	3
3	4	1	5	6	1	2	4	5	6	2
4	3	6	1	5	2	6	3	1	2	5
5	6	2	3	4	6	1	2	3	1	4
6	5	4	2	3	5	4	1	2	3	1

とする．表1は，$2n=6$ である場合の TC の1例である．

ホームアウェイ付け問題とは，入力として TC が与えられたとき，各対戦に対して，ある条件を満たすような開催地の割当てが存在するかを判定する問題である．以下の C.a–C.c を満たす開催地の割当てをホーム・アウェイ テーブル (HAT) と呼ぶ．

C.a 各対戦は対戦する2チームのそれぞれのホームにおいて1回戦ずつ行う．

C.b 各チームのホーム，あるいはアウェイでの連続開催は2期以下とする．

C.c 周期性をもつ．

表2は，表1の TC に対する HAT の1例である．各チームは網掛された要素の対戦をアウェイで行う．例えば，1期においては，チーム1，4，6がホーム，チーム2，3，5がアウェイで対戦を行うことを示す．

表 2: HAT 例 ($2n=6$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	2	3	5	6	4	5	6
2	1	5	6	1	4	3	5	6	4	3
3	4	1	5	6	1	2	4	5	6	2
4	3	6	1	5	2	6	3	1	2	5
5	6	2	3	4	6	1	2	3	1	4
6	5	4	2	3	5	4	1	2	3	1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

計算機実験

チーム数を固定したときの全てのTCを生成し，各TCに対してHATが存在するかどうかを判定をした．その結果，チーム数が$2n=4$の場合，全てのTCに対してHATは存在しないことが分かった．このことは理論的にも証明できる．$2n=6$の場合，56160個のTCの約47%に対してHATが存在しないことが分かった．

以下では，HATが存在しないTCの集合と，HATが存在する集合との構造の違いを調べ，ホームアウェイ付け問題で入力されたTCが，どちらの集合に属するのか判断可能な特徴付けを行う．

3 トーナメントチャートの特徴付け

特徴付けをするにあたって，チーム数を固定した時のTC全体をいくつかの部分集合に分割する．

3.1 チームインデックスのラベルの付替え

ホームアウェイ付け問題では，移動コスト等，各チームに依存したデータを必要としないため，チームインデックスのラベルの付替えは解に影響を与えない．したがって，任意の2つのTC (TC_1, TC_2) について，TC_1のチームインデックスのラベルを適当に付替えたとき，TC_2と一致するならばTC_1とTC_2は同値である，と呼ぶ．チームインデックスのラベルの付け方は，$2n=6$の場合，$6!=720$通りあり，TC全体は$56160/720=78$個の同値類に分類できる．TC_1にHATが存在するならば，TC_2にもHATが存在することは容易に示され，このことからも同値類としての特徴を与えられる．

ここで，チームiとjが対戦する2期をt_{ij}, t'_{ij} ; $1 \leq t_{ij} < t'_{ij} \leq 2(2n-1)$とし，$i$と$j$が行う対戦の開催間隔を$w_{ij} = t'_{ij} - t_{ij}$と定義する．第1開催期$t_{ij}$と$w_{ij}$を併せて開催間隔情報と呼び，IT(TC)と表記する．C.3,C.4より，$3 \leq w_{ij} \leq 2(2n-1)-3$である．$TC_1$,$TC_2$について，$IT(TC_1) = IT(TC_2)$である．つまり，TCの各同値類をIT(TC)によって特徴づけることができるため，以降ではTCはIT(TC)と表記する．本稿では割愛するが，チーム数を固定したときの任意のIT(TC)の性質について，いくつかの基本的な性質を導くことができる．

3.2 期の循環による同値類の拡張

周期性の条件から，自然な概念として期の循環を導入し，同値類の拡張を行う．すなわち，適当なIT(TC)が与えられたとき，これを$IT(TC)^0$とする．次にシーズン全体を1期ずつ前倒しし，初期の対戦を最終期に行うものとする．新たな対戦組合せを$IT(TC)^1$とする．これを$2(2n-1)$回繰返し，生成した対戦組合せの集合を$\mathcal{R}(IT(TC))$とおく．シーズンは$2(2n-1)$期間なので$IT(TC)^{2(2n-1)} = IT(TC)^0$である．$\mathcal{R}(IT(TC))$に属する任意のIT(TC)において，C.1–C.4が保持されることは明らかである．$2n=6$の場合，$\mathcal{R}(IT(TC))$の総数が13個であることを，実験によって確認した．

3.3 HATの存在性

以下が示される．

補題：

あるIT(TC)*$\in \mathcal{R}(IT(TC))$に対して，HATが存在する(しない)ならば，任意の$IT(TC)' \in \mathcal{R}(IT(TC))$についてHATが存在する(しない)．

4 おわりに

今後の課題として，$\mathcal{R}(IT(TC))$の特徴づけと，$\mathcal{R}(IT(TC))$とTCとの関係について調べる必要がある．ホームアウェイ付け問題は，一般のリーグ戦スケジューリング問題において頻出する子問題である．実際のリーグ戦のスケジュール作成現場では周期性を考慮しない場合が多く，このような特徴付けは，現場で扱う対戦組合せのHATの存在性の十分条件として適用可能である．また，問題構造を生かしたアルゴリズム構築の可能性を広げるものである．

参考文献

[1] 松井知己, スポーツのスケジューリング, オペレーションズ・リサーチ, Vol.44, No.3, pp.141–146, 1999.

[2] G. Nemhauser and M. Trick, "Scheduling a major college basketball conference," *Operations Research,* Vol.46, pp.1–8, 1997.

[3] M.A. Trick, "A Scheduling-Then-Break Approach to Sports Timetabling," In: E.K. Burke and W.Erben, (eds.): *Practice and Theory of Automated Timetabling III,* Lecture notes in Computer Science, Vol. 2079, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, pp.242–253, 2001.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.