2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

総滞留時間最小化1機械スケジューリング問題に対する優越テストについて

02701774 神戸商科大学 *柳井 秀三 YANAI Shuzo
01507034 神戸商科大学 藤江 哲也 FUJIE Tetsuya

1. はじめに

優越テスト (dominance test) は分枝限定法における限定操作の一つであり [4]，多くのスケジューリング問題に対して提案されている．このテストは子問題間の優越関係 (dominance relation) に基づくものであり，優越されることが判明した子問題は分枝停止される．したがって，優越関係を多く導くことによって分枝限定法の効率が向上するものと期待できる．しかし，複数の優越関係を適用すると，最適解を得る前にすべての子問題が分枝停止され，最適解を出力せずに分枝限定法が終了してしまう場合がある．

[2] では，総滞留時間最小化1機械スケジューリング問題に対して，既存の優越関係 [1] に加え新たな優越関係を提案し，それらに基づいた分枝限定法を提案している．本稿では，これらの優越関係をそのまま用いると，最適解を出力せずに分枝限定法が終了してしまう可能性があることを指摘し，その修正方法を提案する．さらに，新たな優越関係を提案する．

2. モデル

本稿で扱うモデルは以下に示すとおりである．(1) ジョブ i $(i=1,...,n)$ が1機械により加工される．(2) 各時刻について機械は高々一つのジョブしか加工できず，またジョブの加工は中断できない．(3) ジョブ i の加工時間を p_i，開始可能時刻を r_i とする．(4) スケジュールはジョブ集合 $N=\{1,...,n\}$ の順列 S として与えられる．(5) スケジュール S に対し，ジョブ i の最早完了時刻を $C_i(S)$ とし，$F_i(S)=C_i(S)-r_i$ を i の滞留時間とよぶ．

以上の条件の下で，総滞留時間 $F(S)=\sum_{i=1}^n F_i(S)$ を最小にするスケジュール S を求める問題を考える．ただし，$F(S)$ を最小化することは $C(S)=\sum_{i=1}^n C_i(S)$ を最小化することと等価であることから，以下では $C(S)$ の最小化を考える．この問題は強 NP 困難であることが証明されている [5]．

また，本稿における表記を Chu [2] にしたがい，次のようにする．(a) N の部分集合からなるジョブの順列を部分スケジュールとよぶ．(b) 部分スケジュール K のジョブ集合を $J(K)$ とし，K の最早完了時刻を $\Phi(K)$ とする．(c) K から始まるスケジュールの中で最適なものを $\sum K$ とする．(d) 部分スケジュール K とジョブ $i\in N\backslash J(K)$ に対して，K に続いて i をスケジュールする部分スケジュールを (K,i) と表記する．(e) ジョブ i および時刻 Δ に対して，$R_i(\Delta)=\max\{\Delta,r_i\}$, $E_i(\Delta)=R_i(\Delta)+p_i$ とする．

3. 優越関係

2つの異なる部分スケジュール K, L について，$C(\sum K)\geq C(\sum L)$ が成り立つとき，K は L に優越されているという．また，$C(\sum K)>C(\sum L)$ が成り立つとき，K は L に狭義に優越されているという．

active スケジュールとは，各ジョブについて，他を遅らせることなくそのジョブを早期にスケジュールすることができないスケジュールのことである [2]．active でないスケジュールは狭義に優越されていることは明らかである．S を active スケジュールとする．このとき，隣り合う任意のジョブ i,j $(i<j)$ に対して $R_i(\Delta_i)<R_j(\Delta_j)$ $R_i(\Delta_i)+E_i(\Delta_i)\leq R_j(\Delta_j)+E_j(\Delta_j)$ のどちらかを満たすとき，S を F-active スケジュールという [2]．ただし，Δ_i は S におけるジョブ i の直前のジョブの最早完了時刻である．F-active でないスケジュールは狭義に優越されている [2]．

本稿で扱う分枝限定法は部分スケジュール K を子問題とするものであり，分枝操作によって (K,i) $(\forall i\in N\setminus J(K))$ が生成される．

次に挙げる定理1–5は，Bianco and Ricciardelli [1] および Chu [2] によって提案された優越関係であり，それぞれ部分スケジュール (K,i) が優越されるための十分条件を与えている．

定理 1 ([1]) K および i,j $(i,j\notin J(K), i\neq j)$ に対し，$E_i(\Phi(K))\geq E_j(\Phi(K))$ かつ $E_i(\Phi(K))-E_j(\Phi(K))\geq(p_i-p_j)(|N\backslash J(K)|-1)$ ならば，(K,i) は (K,j) に優越されている．

定理 2 ([1]) K および i,j $(i,j\notin J(K), i\neq j)$ に対し，$E_i(\Phi(K))\leq E_j(\Phi(K))$ かつ $p_i-p_j\leq[E_i(\Phi(K))-E_j(\Phi(K))]|N\backslash J(K)|$ ならば，(K,i) は (K,j) に優越されている．

定理 3 ([2]) $K=(K_1,j,K_2)$ および $i\notin J(K)$ に対し，$E_i(\Phi(K_1))\leq E_j(\Phi(K_1))$ かつ，
$E_i(\Phi(K_1))-E_j(\Phi(K_1)\leq(p_i-p_j)|N\backslash J(K)|$ ならば，$(K,i)=(K_1,j,K_2,i)$ は (K_1,i,K_2,j) に優越されている．

定理 4 ([2]) $K=(K_1,j,K_2)$ および $i\notin J(K)$ に対し，$p_i \geq p_j$ かつ，
$p_i - p_j \geq [E_i(\Phi(K_1)) - E_j(\Phi(K_1))](|J(K_2)|+2)$ ならば，$(K,i)=(K_1,j,K_2,i)$ は (K_1,i,K_2,j) に優越されている．

定理 5 ([2]) 2つの部分スケジュール K, K' に対し，$J(K')=J(K)$，$C(K')\leq C(K)$ かつ，
$|N\backslash J(K')|\,R_j(\Phi(K'))+C(K')\leq |N\backslash J(K)|\,R_j(\Phi(K))+C(K)$ ならば，K は K' に優越されている．ただし，$j=\arg\min\{r_k \mid k\in N\setminus J(K')\}$ である．

[2] では，active, F-active, 定理 1–5 を優越テストに使用している．しかし，単にこれらの優越関係を用いた場合，最適解が得られなくなる場合があることを，次の例で考察する．

i	1	2	3	4	5
r_i	0	5	8	12	26
p_i	9	8	8	1	5

この問題の最適解は $(1,2,4,3,5)$, $(1,3,4,2,5)$ の2つであり，最適値は 101 である．まず子問題，すなわち部分スケジュール $K=(1)$ の分枝操作を考える．その際 $(1,2)$ が生成されるが，これは定理1によって分枝停止される．したがって，この時点で最適解 $(1,2,4,3,5)$ が出力されることはなくなった．次に，$K=(1,3)$ の分枝操作として，active な子問題 $(1,3,2)$, $(1,3,4)$ の2つが生成される．定理3を用いると $(1,3,2)$ は分枝停止となる．また，$(1,3,4)$ を分枝すると唯一の active な子問題 $(1,3,4,2)$ が生成されるが，これも定理3によって分枝停止となる．結局，もう一方の最適解 $(1,3,4,2,5)$ も出力されることがなくなった．

このように最適解が出力されなくなる理由は，優越関係を適用する際，どの部分スケジュールによって優越されるのかを無視していることにある．すなわち，$(1,3,2)$ は $(1,2,3)$ に優越され，$(1,3,4,2)$ は $(1,2,4,3)$ に優越されているが，$(1,2,3)$ および $(1,2,4,3)$ は既に分枝停止となった $(1,2)$ の子問題となっているのである．したがって，このような不正な分枝停止は避けなければならない．定理 1, 2 では，K から生成される子問題 (K,i) と (K,j) の比較を行うため，$N\setminus J(K)$ に順序をつけることによって (K,i) と (K,j) が同時に分枝停止になることを避けることができる (実は $(1,2)$ は $(1,3)$ に優越され，$(1,2)$ は $(1,3)$ に優越されているが，$(1,3)$ は分枝停止としていない)．一方，定理 3–5 を使い，かつ不正な分枝停止を避ける一つの方法として，未処理の子問題リストに含まれる子問題のみと比較することが考えられる．しかし，この方法は一般に多く計算時間を要する．

本稿では，定理 3–5 を，(K,i) が狭義に優越されるための十分条件となるよう変形できることを示した．その方法は，各定理の等号付き不等号 ($\leq$, $\geq$) の一部を等号なしの不等号に置き換えたものである．この変形によって正しく分枝限定法が動く．また，定理3 (の変形) に基づく新しい優越関係を示した．

定理 6 $K=(K_1,j,K_2)$ および $i\notin J(K)$ に対し，$E_i(\Phi(K_1))\leq E_j(\Phi(K_1))$ かつ $E_i(\Phi(K_1))-E_j(\Phi(K_1))+\sum_{k\in K_2}(C'_k-C_k)<(p_i-p_j)|N\backslash J(K)|$ ならば，$(K,i)=(K_1,j,K_2,i)$ は (K_1,i,K_2,j) に狭義に優越されている．

定理 7 $K=(K_1,j,K_2)$ および $i\notin J(K)$ に対し，$E_i(\Phi(K_1))\leq E_j(\Phi(K_1))$ かつ $p_j-p_i<[E_j(\Phi(K_1))-E_i(\Phi(K_1))](|J(K_2)|+2)$ ならば，$(K,i)=(K_1,j,K_2,i)$ は (K_1,i,K_2,j) に狭義に優越されている．

4. 数値実験

[2] に基づいて分枝限定法を構築し，複数の問題のクラスに対して実験を行った．まず，下界値計算を行わない分枝限定法を実行し，定理 3–5 を用いることによってどの程度最適解が得られなくなるのかを調べた．その結果，約 1/4 の割合で最適解が得られない問題のクラスがあった．次に，下界値計算を行う分枝限定法を実行し，どの優越関係が効果的であるのかを調べた．その結果，F-active が効果的であり，また，定理5における K' の候補として，$J(K)$ に [2] で提案されているヒューリスティック解法を適用することが効果的であった．

なお，その他実験結果の詳細は，紙面の都合上当日発表させて頂く．

参考文献

[1] Bianco, L. and Ricciardelli, S., "Scheduling of a Single Machine to Minimize Total Weighted Completion Time Subject to Release Dates," *Naval Research Logistics Quarterly* **29** (1982) 151–167.

[2] Chu. C., "A Branch-and-Bound Algorithm to Minimize Total Flow Time with Unequal Release Dates," *Naval Research Logistics* **39** (1992) 859–875.

[3] Dessouly, M.I. and Deogun, J.S., "Sequencing Jobs with Unequal Ready Times to Minimize Mean Flow Time," *SIAM Journal of Computing* **10** (1982) 192–202.

[4] 茨木俊秀, "組合せ最適化 –分枝限定法を中心として–," 産業図書 (1983).

[5] Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.R. and Brucker P., "Complexity of Machine Scheduling Problems," *Annals of Discrete Mathematics* **1** (1982) 343–362.