2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

参加者の任務達成確率を考慮したInspection ゲーム (その2：警備艇2隻の場合)

02103670 防衛大学校 *工藤 大介 KUDOU Daisuke
01504810 防衛大学校 宝崎 隆祐 HOHZAKI Ryusuke
01110110 防衛大学校 小宮 享 KOMIYA Toru

1. はじめに

本報告では，麻薬密輸入を企図し，我が国領海内に侵入しようとする不審船舶と，それを水際で臨検・阻止しようとする警備艇の間のInspection ゲームを取り上げる．これまでの研究では M. Thomas and Y. Nisgav[1] が，1隻ずつの不審船舶と警備艇による Inspection ゲームを考えた．また V. Baston and F. Bostock[2] は，上記の問題を2隻の警備艇に，Garnaev[3] は3隻の警備艇に拡張した．これまでの研究では，不審船舶の侵入行動は1回を仮定していたため，確率ゲームとしての取り扱いはなされていなかった．本報告では不審船舶の複数回侵入行動が可能であるとし，警備艇を2隻，不審船舶を1隻とした場合のそれぞれの任務の成功確率を考慮した多段階確率ゲームについて取り上げる．

2. モデルの前提

プレイヤーIとして警備艇を，プレイヤーIIとして不審船舶を想定した次の多段階確率ゲームを考える．

1. 1日を単位として，全体で n 日のゲームを考える．
2. プレイヤーIは，1日に多くて2隻の警備艇を派遣でき，全体で k 隻の派遣が可能である．プレイヤーIIの密輸が実施された場合，1隻の警備艇によるプレイヤーIIの拿捕確率を p_1，2隻の拿捕確率を p_3 とする．なお，$p_1 < p_3$ である．
3. プレイヤーIIは，n 日のうち最大で m 日密輸が実施可能であり，警備艇による検閲が実施された場合でも確率 p_2 で密輸が成功する．一方，検閲が実施されなければ密輸は必ず成功する．なお，$p_3+p_2 \leq 1$ とする．
4. プレイヤーIIが密輸に成功した場合，プレイヤーIは -1 の損失を被る．プレイヤーIIが拿捕された場合は，プレイヤーIは利得 $\alpha(>0)$ を得てゲームは終了する．このゲームでは，プレイヤーIの利益はすなわちプレイヤーIIの損失となるゼロ和を仮定する．なお，$\alpha p_1 - p_2 > 0$ とする．
5. プレイヤーIIが拿捕されなければ，次の日のゲームに移る．

3. ゲームの定式化

残り日数を n，警備艇の派遣可能隻数を k，不審船舶の密輸可能日数を m とするこの確率ゲーム $\Gamma(n,k,m)$ は次のような多段階確率ゲームとなる．

$\Gamma(n,k,m)$:

$$\begin{array}{ccc} & \text{密輸する} & \text{密輸しない} \\ \text{2隻で検閲} & S_2 & \Gamma(n-1,k-2,m) \\ \text{1隻で検閲} & S_1 & \Gamma(n-1,k-1,m) \\ \text{検閲しない} & S_0 & \Gamma(n-1,k,m) \end{array} \tag{1}$$

ここで，行に書かれた行動はプレイヤーIの3つの戦略を示し，列に書かれた行動はプレイヤーIIの2つの戦略を示している．

ただし，1列目の各要素は，次のように書くことができる．

$$S_2 = \alpha p_3 - p_2 + (1-p_3)\Gamma(n-1,k-2,m-1)$$
$$S_1 = \alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)\Gamma(n-1,k-1,m-1)$$
$$S_0 = -1 + \Gamma(n-1,k,m-1).$$

すなわち，プレイヤーIIが密輸するという行動をとる場合，プレイヤーIが2隻で検閲すれば，確率 p_3 で不審船舶を拿捕し利得 α を得，確率 p_2 で密輸が成功すれば損失1を被る．また確率 $1-p_3$ で拿捕できなければ $(n-1,k-2,m-1)$ のステージに移る．1隻で検閲した場合，確率 p_1 で不審船舶を拿捕し利得 α を得，同様に確率 p_2 で損失1を被る．また確率 $1-p_1$ で次のステージ $(n-1,k-1,m-1)$ に移る．検閲しない場合，確実に密輸が成功し損失1を被った後，$(n-1,k,m-1)$ のステージに移る．

式(1)からゲーム $\Gamma(n,k,m)$ の値 $v_{k,m}(n)$ は，$2 \leq k$ の場合，次のように書くことができる．

$$v_{k,m}(n) = val\begin{pmatrix} V_2 & v_{k-2,m}(n-1) \\ V_1 & v_{k-1,m}(n-1) \\ V_0 & v_{k,m}(n-1) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

ただし，

$$V_2 = \alpha p_3 - p_2 + (1-p_3)v_{k-2,m-1}(n-1)$$
$$V_1 = \alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v_{k-1,m-1}(n-1)$$
$$V_0 = -1 + v_{k,m-1}(n-1).$$

$k=1$ の場合は，2隻による検閲は実施できないので，1行目を除いた2行2列のゲームの値となる．また初

期条件及び境界条件は次のようになる.

初期条件：$v_{k,m}(0)=0,\ v_{0,m}(n)=-m,\ v_{k,0}(n)=0.$

境界条件：$v_{k,m}(n)=\begin{cases} v_{2n,m}(n) & k>2n \\ v_{k,n}(n) & m>n \end{cases}.$

4. ゲームの解

プレイヤーⅠが2隻で検閲する, 1隻で検閲する, 検閲しないという手を採る確率をそれぞれ x_1,x_2,x_3, プレイヤーⅡが密輸する, 密輸しないという手を採る確率をそれぞれ y_1,y_2 とする. そのときゲームの解は次のようになる.

1. $k=2n$ 及び $n=1$ のとき, ゲームの均衡点は $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$, $(y_1,y_2)=(0,1)$ の純粋戦略であり, ゲームの値は $v_{k,m}(n)=0$ となる.

2. $k=n$ のとき, ゲームの均衡点は $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$, $(y_1,y_2)=(0,1)$ の純粋戦略であり, ゲームの値は $v_{k,m}(n)=0$ となる.

3. $n<k\le 2n-1$ のとき, ゲームの均衡点は $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$, $(y_1,y_2)=(0,1)$ の純粋戦略であり, ゲームの値は $v_{k,m}(n)=0$ となる.

4. $k\le n-1$ のとき, 以下の漸化式により計算されるゲームの解を持つ.

(a) $Av_{k-1,m}(n-1)+(B-A)v_{k,m}(n-1)$
$<Bv_{k-2,m}(n-1)$ の場合,

$$y_1=\frac{v_{k,m}(n-1)-v_{k-2,m}(n-1)}{A}.$$
$$y_2=1-\frac{v_{k,m}(n-1)-v_{k-2,m}(n-1)}{A}.$$
$$x_1=\frac{C}{A},\ x_2=0,\ x_3=1-\frac{C}{A}.$$
$$v_{k,m}(n)=\frac{D}{A}.$$

(b) $Av_{k-1,m}(n-1)+(B-A)v_{k,m}(n-1)$
$>Bv_{k-2,m}(n-1)$ の場合,

$$y_1=\frac{v_{k,m}(n-1)-v_{k-1,m}(n-1)}{B}.$$
$$y_2=1-\frac{v_{k,m}(n-1)-v_{k-1,m}(n-1)}{B}.$$
$$x_1=0\ ,\ x_2=\frac{C}{B}\ ,\ x_3=1-\frac{C}{B}.$$
$$v_{k,m}(n)=\frac{E}{B}.$$

(c) $Av_{k-1,m}(n-1)+(B-A)v_{k,m}(n-1)$
$=Bv_{k-2,m}(n-1)$ の場合,

$$y_1=\frac{v_{k-1,m}(n-1)-v_{k-2,m-1}(n-1)}{A-B}.$$
$$y_2=1-\frac{v_{k-1,m}(n-1)-v_{k-2,m-1}(n-1)}{A-B}.$$

$x_1,x_2,x_3\,(\ge 0)$ は次式を満たす任意の値.

$$Ax_1+Bx_2=C,\ x_3=1-(x_1+x_2).$$
$$v_{k,m}(n)=\frac{F}{A-B}.$$

ただし, 記号 A ～ F は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
A &= \alpha p_3-p_2+(1-p_3)v_{k-2,m-1}(n-1)\\
&\quad +1-v_{k,m-1}(n-1)-v_{k-2,m}(n-1)\\
&\quad +v_{k,m}(n-1).\\
B &= \alpha p_1-p_2+(1-p_1)v_{k-1,m-1}(n-1)\\
&\quad +1-v_{k,m-1}(n-1)-v_{k-1,m}(n-1)\\
&\quad +v_{k,m}(n-1).\\
C &= v_{k,m}(n-1)-v_{k,m-1}(n-1)+1.\\
D &= \{(1-p_3)v_{k-2,m-1}(n-1)\}v_{k,m}(n-1)\\
&\quad +1-v_{k,m-1}(n-1)v_{k-2,m}(n-1)\\
&\quad +(\alpha p_3-p_2)v_{k,m}(n-1).\\
E &= (1-p_1)v_{k-1,m-1}(n-1)v_{k,m}(n-1)\\
&\quad +\{1-v_{k,m-1}(n-1)\}v_{k-1,m}(n-1)\\
&\quad +(\alpha p_1-p_2)v_{k,m}(n-1).\\
F &= \{-1+v_{k,m}(n-1)\}v_{k-1,m}(n-1)\\
&\quad +\{1-v_{k,m}(n-1)\}v_{k-2,m}(n-1)\\
&\quad +(\alpha p_3-\alpha p_1)v_{k,m}(n-1)\\
&\quad +(1-p_3)v_{k-2,m-1}(n-1)v_{k,m}(n-1)\\
&\quad -(1-p_1)v_{k-1,m-1}(n-1)v_{k,m}(n-1).
\end{aligned}$$

5. ゲームの性質

ゲームの値は以下の性質を持つ.

(*i*) ゲームの値は非正, すなわち $v_{k,m}(n)\le 0$.

(*ii*) $v_{k-1,m}(n)\le v_{k,m}(n)$, $v_{k,m}(n)\le v_{k,m-1}(n)$.
$-1+v_{k,m-1}(n)\le v_{k,m}(n)$.

6. 数値例

紙数の関係上, 数値例は発表会当日に報告する.

参考文献

[1] M. Thomas and Y. Nisgav, An Infiltration Game with Time Dependent Payoff, *Naval Research Logistics Quarterly*, 23 (1976), pp.297 - 302.

[2] V. Baston and F. Bostock, A Generalized Inspection Game, *Naval Research Logistics*, 38 (1991), pp.171 - 182.

[3] Garnaev, A Remark on the Customs and Smuggler Game, *Naval Research Logistics*, 41 (1994), pp.287 - 293.

[4] 工藤, 宝崎, 飯田, 小宮, 2003 年春季研究発表会アブストラクト集 (2003), pp.210 - 211.