費用負担戦略を基にしたNetwork Formation Gameについて

01605850 NTTコミュニケーションズ(株) *松林 伸生 MATSUBAYASHI Nobuo
01704544 (株)電通 山川 茂孝 YAMAKAWA Shigetaka

1 はじめに

本研究では、各プレーヤーが各々の利潤を最大化するためにどのようなネットワークを主体的に形成していくかをゲームとしてモデル化したNetwork Formation Gameを考える。ここでは、Jackson and Wolinsky[2]が提案した、目的地までに通過するリンク数に比例して価値が減少していくモデル(Connections Model)をベースに、2つのノード間にリンクを形成するためにかかる費用の負担額を戦略とした非協力ゲームを定式化する。このモデルは、インターネットにおいてプロバイダー同士が接続する際の戦略のイメージに非常に近い。このゲームのNash均衡について分析し、社会的に最適なネットワークを達成する均衡解が多数存在することを示す。さらに、仮に任意のプレーヤーが提携できるとした場合の協力ゲームを考え、そのコアの配分を達成できる均衡解も必ず存在することを証明する。

Network Formation Gameは近年非常に研究が盛んな分野である。特に本研究に近い文献を以下に挙げ、本研究との差異を明確にする。

- Bala and Goyal[1]: Connections Modelをベースに分析しているが、リンクの費用についてはどちらかのプレーヤーが全額負担することを前提としており、最適ネットワークが達成できない場合がある。
- Slikker and Nouweland[3][4]: 戦略形ゲームとして定式化し、協力ゲームの解との関係を調べているが、接続がされていればその形態に関わらず協力ゲームの値は同一としている。またここでは利得配分値そのものが戦略となっている。

本研究では、Connections Modelにおいてリンクの費用分担を考えることにより、あるNash均衡戦略が必ず最適ネットワークを達成すると同時に協力ゲームのコアの配分も達成できることを示しており、この点で[1]を発展させた形となっている。

2 モデル

各ノード$N=\{1,2,\ldots,n\}$をプレーヤーとするゲームを考える。任意のノードi,j間にリンク(i,j)が形成可能であり、その際に要するコストを一律$c(>0)$とする。いま、ノードiがノードjに対してリンクを張るために負担したい額の上限値(支払い意思額)を$x_{ij}(0\le x_{ij}\le c)$で表す。プレーヤーiの戦略は、このx_{ij}を全てのjについて並べたベクトル$\boldsymbol{x}_i$で表現される。さらに、$\boldsymbol{x}_i$を全てのiについて並べたベクトルを$\boldsymbol{x}$で書くことにする。

いま、n人のプレーヤーが同時に意思表明をするとする。このとき形成されるネットワークは$G(\boldsymbol{x})=(N,L(\boldsymbol{x}))$ where $L(\boldsymbol{x})=\{(i,j)|x_{ij}+x_{ji}\ge c\}$であるとする。

さて、このときプレーヤーiの利潤$r_i(\boldsymbol{x})$は次のように定義される。

$$r_i(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{j\in N}\delta^{d_{ij}(G(\boldsymbol{x}))}-\sum_{j:(i,j)\in L(\boldsymbol{x})} c\frac{x_{ij}}{x_{ij}+x_{ji}}$$

where

δ: $0<\delta<1$を満たす任意の定数

$d_{ij}(G(\boldsymbol{x}))$: $G(\boldsymbol{x})$においてiからjへの最短経路上で通過するリンクの数。ただし、経路が存在しない場合には$d_{ij}(G(\boldsymbol{x}))=\infty$とする。

3 Nash均衡と協力ゲーム

はじめに、このゲームのNash均衡に関する基本的な性質を述べる。以下の命題は、均衡下においては各プレーヤーは形成されたリンクに関して意思表明額通りの負担をすることを示している。

Proposition 3.1 $\boldsymbol{x}^*$が均衡であるならば、

$$r_i(\boldsymbol{x}^*)=\sum_{j\in N}\delta^{d_{ij}(G(\boldsymbol{x}^*))}-\sum_{j:(i,j)\in L(\boldsymbol{x}^*)}x^*_{ij}$$

成り立つ。

次に社会的に最適なネットワーク(efficient network)がNash均衡として達成されうるかということについて考える。efficient network G^*の定義は、$G^* = \arg\max_G(\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\delta^{d_{ij}(G)} - \sum_{(i,j)\in L} c)$ で与えられるが、[1]により具体的に以下であることが証明されている。

Lemma 3.1 Case 1: $2(\delta-\delta^2) > c$ のとき、n次CompleteグラフK_n
Case 2: $2(\delta-\delta^2) \le c \le 2\delta+(n-2)\delta^2$ のとき、n次Starグラフ$P_{n,\bar{i}}$($\bar{i}$はcenterのノード)
Case3: $2\delta+(n-2)\delta^2 < c$ のとき、n次Emptyグラフ$\emptyset_n$.

Theorem 3.1 $G(\boldsymbol{x}^*)$がefficient networkであるような均衡解$\boldsymbol{x}^*$が必ず存在する。具体的に以下の戦略が該当する。
Case 1のとき: x^*_{ij}を$c-(\delta-\delta^2) \le x^*_{ij} \le \delta-\delta^2$を満たす任意の値とし、$x^*_{ji} = c - x^*_{ij}$とする。
Case 2のとき: あるプレーヤー$\bar{i}$について、$c-(\delta+(n-2)\delta^2) \le x^*_{i\bar{i}} \le \delta (i \neq \bar{i})$とし、その他のプレーヤーについて、$x^*_{\bar{i}i} = c - x^*_{i\bar{i}}, x^*_{ij} = 0$ for $j \neq \bar{i}$とする。
Case 3のとき: 全てのi,jについて$x^*_{ij} = 0$とする。

Theorem3.1より、Case 1及びCase 2については、efficient networkを達成可能な均衡解は多数存在することが分かる。そこで、分析をもう一歩進めて、任意のプレーヤー同士が提携できるとした場合の協力ゲームを仮に考え（当然、全体提携時はefficient networkを形成する)、そのコアの配分を達成するような均衡解が存在するかどうかについて考える。具体的に以下の特性関数をもつ提携形ゲーム$V=(N,R)$を定義する。

$$R(S) = \max_{G_S}(\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\delta^{d_{ij}(G_S)} - \sum_{(i,j)\in L_S} c)$$

ここで、$G_S = (S, L_S)$は、Sに含まれるプレーヤーだけで形成可能なネットワークを表す。

明らかに、$R(S)$を達成するネットワークはLemma3.1におけるグラフの次数を$|S|$にしたものになることに注意する。

さて、以下のような典型的な戦略構造を考える。

Definition 3.1 *1.* 全てのプレーヤーiが$\lambda^K_{ij} = \frac{c}{2}$ for $^\forall j$と表明する戦略構造$\boldsymbol{\lambda}^K$。
2. あるプレーヤー$\bar{i}$が、

$$\lambda^P_{\bar{i}j} = \begin{cases} \delta & : \delta \le c \\ c & : c < \delta \end{cases}$$

とし、残りのプレーヤー$i \neq \bar{i}$が、

$$\lambda^P_{ij} = \begin{cases} c - \lambda^P_{\bar{i}i} & : j = \bar{i} \\ 0 & : j \neq \bar{i} \end{cases}$$

と表明する戦略構造$\boldsymbol{\lambda}^P$。
3. 全てのプレーヤーiが$\lambda^E_{ij} = 0$ for $^\forall j$と表明する戦略構造$\boldsymbol{\lambda}^E$。

以下の定理は、それぞれのケースに応じて上記の典型的戦略構造がNash均衡となること、そしてそれにより得られるプレーヤーの利潤が提携形ゲームVにおけるコアの配分に一致していることを示している。

Theorem 3.2 $r_i(\boldsymbol{x}^*)$が提携形ゲームVのコアに入るような均衡解$\boldsymbol{x}^*$が必ず存在する。具体的にはCase 1〜Case 3において、それぞれ$\boldsymbol{\lambda}^K, \boldsymbol{\lambda}^P, \boldsymbol{\lambda}^E$をとることが該当する。

4 今後の研究課題

1．一度に全員が意思表明をするのではなく、時刻tの時に意思表明するプレーヤーが$N^t \subset N$であるようなゲームを繰り返したときの挙動。

2．$\delta = 1$、かつリンクのコストが一律cではなく、リンクごとに異なる場合の分析。(efficient networkは必ずminimum cost treeになる。)

参考文献

[1] Bala, V. and Goyal, S., A noncooperative model of network formation, Econometrica 68-5 (2000) 1181-1229.

[2] Jackson, M, O. and Wolinsky, A., A strategic model of social and economic networks, Journal of Economic Theory 71 (1996) 44-74.

[3] Slikker, M. and van den Nouweland, A., Network formation models with costs for establishing links, Review of Economic design 5 (2000) 333-362.

[4] Slikker, M. and van den Nouweland, A., A one-stage model of link formation and payoff division, Games and Economic Behavior 34 (2001) 153-175.