複数代替案をもつ提携形ゲームの解

01308524 大阪大学大学院 *鶴見 昌代 TSURUMI Masayo
01307844 大阪大学大学院 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo
株式会社 東芝 山形 英顕 YAMAGATA Hideaki
01009544 大阪大学大学院 乾口 雅弘 INUIGUCHI Masahiro

1. はじめに

通常の提携形ゲームにおいて各プレイヤーの意思決定は，提携に参加するかどうか二者択一なものとして議論されている．これに対し，各プレイヤーが自らの意思により選択しうる代替案が複数存在する状況は r 代替案ゲームとしてモデル化されてきた．この r 代替案ゲームにおける合理的な利得分配を与える解として，各プレイヤーの限界貢献度に基づく値が考えられる．すべてのプレイヤーの代替案選択状況はプレイヤー集合の分割であるアレンジメントによって表すことができる．本論文では，あるアレンジメントが与えられたときに，プレイヤーがある順列に従って初期アレンジメントからこのアレンジメントに代替案選択を変更していく際の限界貢献度の概念を導入する．既存の Bolger の解が初期アレンジメントに制限を与えた場合の限界貢献度の期待値であることを示す．さらに，初期アレンジメントに制限を設けない場合の解を新たに提案し，その公理的特徴づけを明らかにする．また，r 代替案ゲームの一般化として，拡張 r 代替案ゲームを提案し，その解についても議論する．

2. r 代替案ゲーム

まず，r 代替案ゲームを定義する．複数のプレイヤーが存在して，各プレイヤーが選択できる代替案が複数ある状況について考える．プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，代替案の集合を $R = \{1, 2, \ldots, r\}$ とする．各プレイヤーが r 個の代替案のうち一つを必ず選ぶものとしたとき，各プレイヤーがどの代替案を選択したかを表現するためにはプレイヤー集合 N の r 個の集合への分割を考えればよく，本論文ではそれを [1] と同様にアレンジメントと呼ぶ．

定義 1 N に対するアレンジメント，あるいは単にアレンジメントとは，次の性質を満たすプレイヤーの分割 $Z = (Z_1, \ldots, Z_r)$ のことをいう．

1. $Z_p \subseteq N$, $\forall p \in R$
2. $Z_p \cap Z_q = \emptyset$, $\forall p \neq q$
3. $\bigcup_{p=1}^{r} Z_p = N$

アレンジメント全体の集合を $\mathcal{A}$ と表す．各プレイヤーが r 個の代替案のうち一つを必ず選ぶものとし，各プレイヤーの代替案の選び方によって得られる利益が定まるものとすると，次のような関数が定義される．

定義 2 次式を満たすような関数 $v\ :\mathcal{A} \to \mathbb{R}^r$ を r 代替案ゲームという．

$$v(Z) = (v_1(Z), \ldots, v_r(Z))$$
$$v_p(Z) = 0\ ,\ \forall p \in R\ s.t.\ Z_p = \emptyset$$

$v_p(Z)$ は，各プレイヤーがアレンジメント Z に従って代替案を選択するときの提携 Z_p の提携値を表す．なお本論文では，プレイヤー集合 N は固定して考え，r 代替案ゲームの全体を $\mathcal{G}$ で表す．

また，いずれの代替案も選択していないプレイヤーがいる状況を考えると次のようなプレイヤー集合の族が考えられる．

定義 3 次の性質をみたす $Y = (Y_1, \ldots, Y_r)$ を N に対する r 代替案間の部分アレンジメント，あるいは単に部分アレンジメントとよぶ．

1. $Y_p \subseteq N$, $\forall p \in R$
2. $Y_p \cap Y_q = \emptyset$, $\forall p \neq q$

部分アレンジメント全体の集合を $\mathcal{B}$ と表す．

本研究では，部分アレンジメントの概念に基づいて，次のような拡張 r 代替案ゲームを提案する．

定義 4 次式を満たすような関数 $v\ :\mathcal{B} \to \mathbf{R^r}$ を拡張 r 代替案ゲームという．

$$v(Y) = (v_1(Y), \ldots, v_r(Y))$$
$$v_p(Y) = 0 \quad \forall p \in R\ \ s.t.\ Y_p = \emptyset$$

$v_p(Y)$ は，各プレイヤーが部分アレンジメント Y に従って代替案を選択するときの提携 Y_p の提携値を表す．拡張 r 代替案ゲームは r 代替案ゲームの定義域を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ に拡張したものである．なお，紙面の都合上，以下では r 代替案ゲームについての議論にとどめる．

3. Bolger の解

r 代替案ゲームの解とは，プレイヤー集合 N，代替案集合 R，およびアレンジメント Z が与えられ，各プレイヤーがアレンジメント Z を形成するように代替案を選択したときに，各プレイヤーが得られると期待される値を定めるルール，すなわち，$\mathcal{A} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ で表される関数である．r 代替案ゲームの解の代表的なものが Bolger の解 [2] である．Bolger は r 代替案ゲームにおいて，各プレイヤーが最終的に同じ代替案 p を選択すると想定し，そのとき得られる全体提携値 $v_p(Z)$ を各プレイヤーにシェアした値 $\theta_i^p(v)$ を r 代替案ゲームの解として次のように定義した．

定義 5 $i \in Z_p$ であるようなアレンジメント Z においてプレイヤー i が代替案の選択を q に変更することにより得られるアレンジメントは次式のように $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ の写像 T_q^i を用いて定義される．

$$(T_q^i(Z))_j = \begin{cases} Z_j & \text{if} \ \ j \neq p, q \\ Z_j \setminus \{i\} & \text{if} \ \ j = p \\ Z_j \cup \{i\} & \text{if} \ \ j = q \end{cases}$$

定義 6 p を一つの代替案とし，すべての r 代替案ゲーム v および $i \in Z_p$ となる $i \in N$ に対して p に関する値を $\theta_i^p(v)$ として次式のように定義する．

$$\theta_i^p(v) = \sum_{\substack{Z \in \mathcal{A} \\ i \in Z_p}} \frac{(|Z_p| - 1)!(n - |Z_p|)!}{n! \cdot (r-1)^{n-|Z_p|+1}} \sum_{\substack{j \in R \\ j \neq p}} \{v_p(Z) - v_p(T_j^i(Z))\}.$$

$\theta_i^p(v)$ は，$i \in Z_p$ であるようなすべてのアレンジメントに対して，プレイヤー i が選択する代替案を p から p 以外のすべてへと変更することによって生じる限界貢献度の期待値（重み和）をとっている．

さらに，Bolger はすべてのプレイヤーが必ずしも同じ代替案を選択するとは限らないような状況，すなわち一般のアレンジメントに対する解を定義するために次のようなサブゲームを用いた．v を r 代替案ゲーム，Z をアレンジメント，p を代替案とする．このときプレイヤー集合を Z_p，代替案集合を R，Z_p のアレンジメン

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

トをΓとするr代替案ゲームvのサブゲームv_Z^pは次式のように定義される.

$$(v_Z^p)_j(\Gamma)=\begin{cases} v_p(\Delta) & \text{if} \quad j=p \\ 0 & \text{if} \quad j\neq p \end{cases}$$

ここで，Δは

$$\Delta_j=\begin{cases} \Gamma_p & \text{if} \quad j=p \\ \Gamma_j\cup Z_j & \text{if} \quad j\neq p \end{cases}$$

となるようなNのアレンジメントを表す．このZ_pをプレイヤー集合にもつサブゲームを用いた，一般のアレンジメントに対する各プレイヤーの得られる利得分配$\theta_i(Z;v)$は次のように定義される.

定義 7 一般的なアレンジメント $Z\in\mathcal{A}$に関するr代替案ゲーム v の解 $\theta_i(Z;v)$ は，$i\in Z_p$ とするとき $\theta_i(Z;v)=\theta_i^p(v_Z^p)$ で定義される.

このようにBolgerは，すべてのプレイヤーが必ずしも同じ代替案を選択しないような状況に対し，代替案p以外の代替案を選択するプレイヤーは代替案を覆さないものとし，代替案pを選択するプレイヤーのみが代替案を覆し生じる限界貢献度について考慮した利得分配法をr代替案ゲームの解として提案した.

ここで，アレンジメントを$Z\in\mathcal{A}$とする．初期状態としてあるアレンジメント$Z^{(0)}$が与えられ，$Z^{(0)}$からプレイヤー$i\in N$がNの順列πに従った順序でZを形成するように代替案に変更していき，n回のプロセスを経て初期状態$Z^{(0)}$からZへの変更が完了するような状況を考えると，次のような定理が得られる.

定理 1 vをr代替案ゲームとする．$i\in Z_p$であるようなアレンジメント $Z\in\mathcal{A}$に対して，Bolgerの解は

$$\begin{aligned}&\theta_i(Z;v)\\ &=\frac{1}{|Z_p|!(r-1)^{|Z_p|}}\sum_{Z^{(0)}\in\mathcal{A}^p(Z)}\sum_{\pi^p\in\Pi^p}\nu_i(\pi^p,Z^{(0)},Z;v)\\ &=\frac{1}{{}_nC_{|Z_p|}(n-|Z_p|)!|Z_p|!(r-1)^{|Z_p|}}\\ &\qquad\times\sum_{Z^{(0)}\in\mathcal{A}^p(Z)}\sum_{\pi\in\Pi}\nu_i(\pi,Z^{(0)},Z;v)\end{aligned}$$

なる関係を満たす.

4. 限界貢献度に基づく新しい解とその公理化

前節では，初期アレンジメントをクラス$\mathcal{A}^p(Z)$に限定した場合の限界貢献度の期待値をとることにより，Bolgerの解が導かれることを示した．これは，$i\in Z_p$のとき$j\in Z_j (j\neq p)$なるプレイヤーは初期のアレンジメントにおいても$j\in Z_j^{(0)}$を満たしている，すなわち代替案jを選択していることを仮定しており，代替案pを選択するプレイヤーの利得を考える際には他の代替案を選択するプレイヤーはその選択を覆すことがないという前提を置いていたことになる．しかし，実際には他の代替案を選択していたプレイヤーもその選択を変更することは起こりえるし，その場合も考慮してプレイヤー i の値を評価することが考えられる．すなわち，考える初期アレンジメントのクラスを限定することなく$\mathcal{A}$全体にとった次の値を考えることができる.

$$\psi_i(Z;v)=\sum_{Z^{(0)}\in\mathcal{A}}\sum_{\pi\in\Pi}\nu_i(\pi,Z^{(0)},Z;v)$$

ただし，Bolgerの解とは異なり，$\psi(Z;v)$ はそのままでは公理5で要請されたZ有効な値ではないため，これを規格化する必要がある．このZ有効性は，提携Z_pが得た値はそのすべてがこの提携内に属するプレイヤーの間で分配されることを意味しており，極めて妥当な条件と考えられる．そこで，$\psi_i(Z;v)$の大きさに比例してZ有効性を持つように荷重をかけた値をr代替案ゲームにおけるプレイヤーiの解$\xi_i(Z;v)$とする．すなわち，$\xi_i(Z;v)$は次式で与えられる.

$$\xi_i(Z;v)=v_p(Z)\cdot\psi_i(Z;v)\Big/\sum_{i\in Z_p}\psi_i(Z;v)$$

特に$v_p(Z)=0$のときは，すべての$i\in Z_p$に対して$\xi_i(Z;v)=0$となる．また利益ゲームを念頭において$v_p(Z)\geq 0$であると考え，$v_p(Z)>0$となる場合には上式の分母も>0になると仮定する.

次に，Bolgerの解の場合と同様に，上で提案した解$\xi_i(Z;v)$を公理的に特徴付けることを考える．このため，以下に述べる4つの公理を用いる．r代替案ゲームv，アレンジメントZに対してプレイヤーiが受ける利得分配$\varphi_i(Z;v)$を定める関数φをr代替案ゲームの解とする.

公理 1 （ゼロ評価性）r代替案ゲームvにおいて$p\in R$，$Z\in\mathcal{A}$に対し$v_p(Z)=0$であれば，すべての$i\in Z_p$に対し$\varphi_i(Z;v)=0$である.

公理 2 （加重線形性）$Z\in\mathcal{A}$において$i\in Z_p$とする．$\gamma^p(Z;v)=v_p(Z)/\sum_{k\in Z_p}\psi_k(Z;v)$とすると，$v_p(Z)>0$，$w_p(Z)>0$なる$r$代替案ゲーム$v,w$と$c\in\mathbb{R}$に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_i(Z;v+w)}{\gamma^p(Z;v+w)}&=\frac{\varphi_i(Z;v)}{\gamma^p(Z;v)}+\frac{\varphi_i(Z;w)}{\gamma^p(Z;w)}\\ \varphi_i(Z;c\cdot v)&=c\cdot\varphi_i(Z;v)\end{aligned}$$

公理 3 （対称性）任意の$Z\in\mathcal{A}$，$i\in N$，σに対して$\varphi_i(Z;v)=\varphi_{\sigma(i)}(\sigma Z;\sigma v)$が成り立つ.

公理 4 （Z有効性）任意のr代替案ゲームvおよび$p\in R$，$Z\in\mathcal{A}$に対して，$\sum_{i\in Z_p}\varphi_i(Z;v)=v_p(Z)$が成り立つ.

定理 2 r代替案ゲームvとアレンジメントZが与えられたときに，公理1から4を満たす解が唯一つ存在しそれが$\xi_i(Z;v)$である.

5. おわりに

本研究ではr代替案ゲームの解を考える上で基礎となる，初期アレンジメントとプレイヤーの順列に基づく限界貢献度の概念を導入した．各プレイヤーへの利得配分はこの限界貢献度の期待値を考えるのが妥当であるが，初期アレンジメントに「対象としている代替案以外の代替案を選択しているプレイヤーについてはその選択を最初から固定しておく」という制限を与えた場合が，既存のr代替案ゲームの解であるBolgerの解であることを示した．したがって，この制限を緩めることにより，他の代替案を選択するプレイヤーも代替案を覆しうる状況にも対応した解概念を考えることができる．ここでは初期アレンジメントに全く制限を設けない場合の解を提案し，その公理的特徴づけを与えた．また，r代替案ゲームの一般化として，拡張r代替案ゲームを提案し，その解についても議論した.

参考文献

[1] E. Bolger: A class of efficient values for games in partision function form, *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, Vol. 8, pp. 460-466 (1987)

[2] E. Bolger: A value for games with n players and r alternatives, *Int. J. of Game Theory*, Vol. 22, No. 1, pp. 319-334 (1993)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．