2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

エントロピー最大化基準に基づく重み付きボロノイ領域の構成とその応用

02005315 岡山県立大学 *小野 勉 ONO Tsutomu
01107215 岡山県立大学 金川 明弘 KANAGAWA Akihiro
01602404 岡山大学 宮崎 茂次 MIYAZAKI Shigeji

1 はじめに

距離をコストと考えた最適施設配置問題などにおいてはボロノイ図 [1] を適用することにより，有効な解に到達することが多い．ボロノイ図は，与えられた母点の勢力範囲を示すボロノイ領域を図示したものであり，その形状は近接する母点間の垂直二等分線から構成される凸多角形である．

このボロノイ図の一種の拡張として重み付きボロノイ図が提案されている．これは各母点が異なる重みをもっているとの仮定の下で勢力範囲を構成するもので，より一般性が高い．本研究では 2 次元平面上に分布させた多くの散布点とそれとは異なる少数の母点に関して，構成した領域がほぼ均等に散布点を含めるような重みを算出する方法について述べる．また，提案法を複数のデポをもつ車両配送問題へ応用したときの解法を示す．

2 重み付きボロノイ領域

今，平面上に互いに位置の異なる n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を考える．この平面上の任意の点を P とし，点 P と点 P_i の距離を $d(P, P_i)$ とするとき，以下の条件

$$d(P, P_i) \leq d(P, P_j) \tag{1}$$

を満たす点 P の集合

$$V_i = \{P \mid d(P, P_i) \leq d(P, P_j)\} \tag{2}$$

$$i \neq j, j = 1, 2, \ldots, n$$

を，点 P_i のボロノイ領域と呼び，点 P_i を母点と呼ぶ．

ボロノイ領域の全体 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ で平面を分割すると，各領域は母点を核とした多角形となり，これをボロノイ図と呼んでいる．

各母点に重み $w_1, w_2, \ldots, w_n$ を与え，正数 t を用いて別の領域

$$V_i^* = \{P \mid w_i + t \cdot d(P, P_i) \leq w_j + t \cdot d(P, P_j)\} \tag{3}$$

$$i \neq j, j = 1, 2, \ldots, n$$

を考えると，これは重み付きボロノイ領域と呼ばれる [1]． w_i を全て等しくとると，(3) 式での領域は (2) 式で与えられる領域と等しくなり，この点において重み付きボロノイ図は通常のボロノイ図の一種の拡張といえる．w_i が等しくないとき，重み付きボロノイ図の境界線は双曲線となる．

3 エントロピー最大化基準

今，平面上に母点 $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ とは異なる N 個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ を考える．ここで，P_i を母点とするある重み付きボロノイ領域 V_i^* に包含される $x_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ の個数を m_i とする．このとき

$$m_1 \doteq m_2 \doteq \ldots \doteq m_n \tag{4}$$

となるような，重み付きボロノイ領域の重みを決定する問題を考える．

$$\alpha_i = \frac{m_i}{N}$$

とすると，この α_i は $0 \leq \alpha_i \leq 1$ かつ $\sum \alpha_i = 1$ を満たすので，離散確率事象のエントロピー

$$H = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log \alpha_i \tag{5}$$

を最大化する問題に帰結できる．目的関数の見通しを考慮し，相対エントロピー

$$H_R(w_1, w_2, \ldots, w_n, t) = \frac{H}{H_{max}} = -\frac{\sum \alpha_i \log \alpha_i}{\log n} \tag{6}$$

を最大化しても良い．ただ，H_R も $w_1, w_2, \ldots, w_n, t$ に対して連続ではないため，勾配情報を用いる極値探索法は使えない．

そこで，初期状態として

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 0 \tag{7}$$

とする．ここから，

$$m_a = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \tag{8}$$

$$m_b = \min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \tag{9}$$

とおき，ある刻み幅 Δw より

$$w_a = w_a + \Delta w \tag{10}$$

$$w_b = w_b - \Delta w \tag{11}$$

にて，重みを更新する．以上の手順を重みの変化により，エントロピーの改善がみられなくなるまで繰り返す．

4 実行結果

ランダムに生成した散布点と母点に対し，エントロピー最大化のように母点を中心として散布点をグループに分ける (図 1 参照).

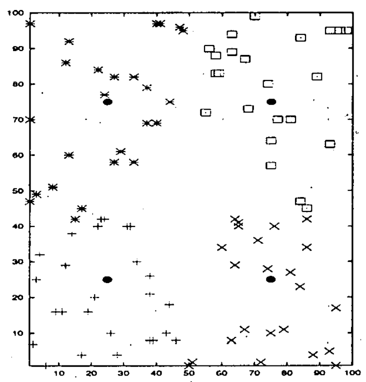

図 1: 重み付きボロノイ図による散布点の分割

以下の組み合わせについて

・分割 (母点) 数　n:3,4,5

・総散布点数　N:100,200,300,500,1000

実行結果を小数第 4 位で四捨五入して表 1 に示す．ただし，$t = 1$，$\Delta w = 10^{-4}$ とした．

表 1: エントロピー最大化重みによる各領域に含まれる散布点数

分割数 n	総散布点数 N	各領域の散布点数 m_i	H [nat]	H_R
3	100	36,36,28	1.092	0.994
	200	69,69,62	1.097	0.999
	300	101,101,98	1.099	1.000
	500	169,168,163	1.098	1.000
	1000	334,333,333	1.099	1.000
4	100	27,27,23,23	1.383	0.998
	200	52,50,49,49	1.386	1.000
	300	77,76,76,71	1.386	1.000
	500	133,131,118,118	1.385	0.999
	1000	253,252,251,244	1.386	1.000
5	100	20,20,20,20,20	1.609	1.000
	200	41,40,40,40,39	1.609	1.000
	300	61,61,60,59,59	1.609	1.000
	500	101,100,100,100,99	1.609	1.000
	1000	201,201,201,200,197	1.609	1.000

5 車両配送問題への適用

巡回セールスマン問題 (Travelling Salesman Problem:TSP) は組合せ最適化問題の一典型であるが実際の経路問題として扱われる時は，複数のセールスマン (車両) による経路割り当て問題となることが多い．例えば，車両配送問題 (Vehicle Routing Problem:VRP) においてはデポと呼ばれる配送拠点から複数の車両がある制約条件を満たしつつ，目的関数を最小化する経路を希求する．今，n 個のデポと N 個の配送先を考える．ただし，各デポには担当できる配送先の数には上限があるものとする．このとき，なるべく効率の良い各デポの搬送経路を求める問題を考える．

従来は，デポ数が多い場合の解法は一般的に知られていない．しかしながら提案した重み付きボロノイ領域で，デポを母点として，配送地点を分けると，あとは各領域ごとに単一デポの解法である k-TSP のヒューリスティック解法 [2] を適用すればよい．

6 おわりに

エントロピー最大化基準に基づく，重み決定法により得られる重み付きボロノイ領域の構成方法を提案した．この重み付きボロノイ領域は，同平面的に与えられた点をほぼ均等に含む．このことを利用してデポ数の大きい車両配送問題への適用例を示した．今後の課題としては t を含めた最適な重みを求めるために効率良いアルゴリズムの研究が望まれる．

また，提案の重み付きボロノイ領域は，GIS[3] におけるエリアマーケティングの新規出店計画や，駅や幹線道路を中心とした公示地価の分布の分析等の適用事例が考えられる．

参考文献

[1] 岡部篤行，鈴木敦夫： 最適配置の数理，朝倉書店 (1992)

[2] E.L.Lawler, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan, and D.B.Shmoys : *THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM*, JOHN WILEY & SONS (1989)

[3] 伊理正夫監修，腰塚武志編集： 計算幾何学と地理情報処理第 2 版，共立出版 (1993)