期待総頂点間短縮経路長を最大にする完全K分木の深さ同一頂点間の隣接化

01204874　流通科学大学 情報学部　＊澤田　清　SAWADA Kiyoshi

1．はじめに

企業などの組織の階層構造（ピラミッド組織）は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に対して追加的な隣接化を行う（辺を追加する）ことは，上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [1].

筆者らは，すでに，高さ H の完全 K 分木の，同じ深さの全頂点間に追加的隣接化を行った場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする隣接深さを求めた [2]．これは，完全 K 分木型の構造を持つ組織内の同じ層全体での追加的な関係形成（集合研修や会合など）を行う場合に，どの層で関係を結べば組織全体の情報伝達が最も効率的になるかという問題に対応している．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

上述した従来の問題は，組織内の集合研修や会合に，同じ階層の人が全員出席することを意味している．しかし，現実の組織内行動を考えた場合，必ずしも対象者全員が出席するわけではないと考えられる．そこで，本研究では，同じ階層の各兄弟集合に含まれる K 人の中で，$m\,(m=1,2,\cdots,K)$ 人は必ず出席するが，残りの $K-m$ 人は確率 $p\,(0<p\leq 1)$ で出席する場合を考える．ただし，$K-m$ 人の出席確率 p はそれぞれ独立であるとする．このとき，出席者同士はすべての組み合わせで追加的関係が形成されるが，欠席者は全く追加的関係が得られないものとする．ここで，兄弟集合内で少なくとも1人は出席すると仮定しているのは，集合研修や会合において各部署内で1人ずつの責任者がいることを意味している．本問題において，$m=K$ もしくは $p=1$ の場合は，対象者全員が出席する従来の問題となる．すなわち，本問題は従来の問題を一般化した問題となっている．

完全 K 分木の2頂点 v_i と v_j $(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし，$l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような追加的隣接化後の2頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さの期待値を $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は追加的隣接化により2頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されるかの期待値を表す．ここでは，これを2頂点間の期待短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の期待短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，期待総頂点間短縮経路長と定義する．

以下では，本問題の期待総頂点間短縮経路長を定式化し，それを最大にする隣接深さを求める．

2．期待総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の，深さ $N\,(N=1,2,\cdots,H)$ の出席頂点のすべての頂点間を隣接化する．ここで，各頂点の出席確率は，各兄弟集合に含まれる K 個の頂点の中で，$m\,(m=1,2,\cdots,K)$ 個は1とし，残りの $K-m$ 個はそれぞれ独立の $p\,(0<p\leq 1)$ とする．以下では，まず，深さ N のすべての頂点が出席の場合の期待総頂点間短縮経路長を示し，それを用いて本問題の期待総頂点間短縮経路長を定式化する．

深さ N のすべての頂点が出席の場合，すなわち $m=K$ もしくは $p=1$ の場合の期待総頂点間短縮経路長 $S_1(N)$ は，

$$
\begin{aligned}
S_1(N) & \\
= & \ \{M(H-N)\}^2\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{i-1} \\
& + M(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)K^{j-1} \\
& + \frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である．ただし，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する．また，$M(h)(h = 0, 1, 2, \cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表し，

$$M(h) = \frac{K^{h+1} - 1}{K - 1} \tag{2}$$

である．

次に，深さ N の各兄弟集合のうち $K - m$ 個の頂点の出席確率が p のときに，すべての頂点が出席の場合と比べて期待総頂点間短縮経路長がどれだけ小さくなるかを考える．

深さ N の兄弟の子孫間について，これの総和を求めると，

$$\begin{aligned} & A(N) \\ & = \left\{ \frac{K(K-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - m(K-m)p \right. \\ & \quad \left. - \frac{(K-m)(K-m-1)}{2} p^2 \right\} \\ & \quad \times \left\{ M(H-N) \right\}^2 K^{N-1} \end{aligned} \tag{3}$$

となる $(N = 1, 2, \cdots, H)$．次に，深さ N の兄弟の子孫間以外については，$N = 1$ のとき 0，$N = 2, 3, \cdots, H$ のとき

$$\begin{aligned} & B(N) \\ & = \left\{ 2K(K^{N-1} - 1)M(H-N) + 2M(N-1) \right. \\ & \quad \left. - (K-1)(N-1) - 2N \right\} (K-m)(1-p) \\ & \quad \times M(H-N) K^{N-1} \\ & \quad - \frac{(K-1)(K-m)^2(1-p)^2}{2} \\ & \quad \times \left\{ M(H-N) \right\}^2 K^{N-1} \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる．

したがって，本問題の期待総頂点間短縮経路長 $S_2(N)$ は，$N = 1$ のとき，

$$S_2(N) = S_1(1) - A(1) \tag{5}$$

$N = 2, 3, \cdots, H$ のとき，

$$S_2(N) = S_1(N) - A(N) - B(N) \tag{6}$$

と定式化できる．

以下では，$S_2(N)$ を最大にする N を求める．

3．最適隣接深さ

$S_2(N)$ の N に関する差分を $\Delta S_2(N)$ とおくと，$N = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} & \Delta S_2(N) \\ & = S_2(2) - S_2(1) \\ & = S_1(2) - S_1(1) - A(2) + A(1) - B(2) \end{aligned} \tag{7}$$

$N = 2, 3, \cdots, H - 1$ のとき，

$$\begin{aligned} & \Delta S_2(N) \\ & = S_2(N+1) - S_2(N) \\ & = S_1(N+1) - S_1(N) - A(N+1) + A(N) \\ & \quad - B(N+1) + B(N) \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ただし，$H = 2, 3, \cdots$ である．

このとき，

(i) $N = 1$ のとき，$\Delta S_2(N) > 0$

(ii) $N = 2, 3, \cdots, H - 1$ のとき，$\Delta S_2(N) > 0$

が成り立つことから，期待総頂点間短縮経路長 $S_2(N)$ を最大にする隣接深さは，m，p に関係なく，$N^* = H$ となる．

参考文献

[1] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86, 1993.

[2] 澤田 清, 宇野 斉, “完全２分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335–346, 2000.