巡回セールスマン問題の定式化に関する一考察

01403755　広島県立大学　錦織 昭峰　NISHIKORI Akimine

1 まえがき

最適化問題の代表的な例としてよく取り上げられる問題に、巡回セールスマン問題 [1,2,3] がある。この問題は、n 個のノードとそれらの間の距離が与えられたときに、すべてのノードを一度ずつ訪問して元に戻る巡回路のうちで最短のものを求めよ、と表される。巡回セールスマン問題を整数計画問題に定式化すると、数理計画システム MPS（Mathematical Programming System）のソフトウェア（例えば、$XPRESS-MP$ [4]）で処理することができる。

従来は、巡回セールスマン問題の目的関数と制約条件が一次式で表せる場合に、どのような定式化になるのかが明確に示されていない。特に、部分巡回路除去条件 [2] は、数式で厳密に示されてはいない。

本研究では、対称巡回セールスマン問題において、制約条件が1次式である整数計画問題の定式化を示している [5]。特に、部分巡回路除去条件式の個数を示している。これにより、制約条件式を明確に列挙することができる。

2 定式化

いま、ノードの総数を n とする。任意のノード i,j に対して、i から j あるいは j から i へ移動するときには、それぞれ d_{ij} あるいは d_{ji} の距離であるとし、$d_{ij}=d_{ji}>0$ とする。ノード i,j 間の経路、すなわち、アーク (i,j) に対して整数変数 x_{ij} を導入して、$x_{ij}=1$ ならばアーク (i,j) を巡回路に含める、$x_{ij}=0$ ならば含めないとする。すなわち、$x_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ を次式で定義する。

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{アーク } (i,j) \text{ を巡回路に含める}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases} \tag{1}$$

このとき、本問題を以下のように定式化することができる [2]。ただし、$d_{ij}=d_{ji}$ の下で $x_{ij}=x_{ji}$ が成立するので、一般性を失うことなく、定式化は $i>j$ を満たす添字をもつ変数 x_{ij} のみを用いて行う。

$$\text{目的関数}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}x_{ij} \longrightarrow \text{最小} \tag{2}$$

$$\text{制約条件}\quad \sum_{j=i+1}^{n} x_{ji}+\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} = 2,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$x \in X \tag{4}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ あるいは } 1,\quad i = 1,2,\cdots,n\ ;\ j = 1,2,\cdots,(i-1) \tag{5}$$

一番めの条件 (3) 式は、任意の巡回路において、各ノードに接続するアークはちょうど2本あるという制約を表している。しかしこれだけだと、分離した複数の部分巡回路からなる解も許してしまうので、それを禁止する二番めの条件 (4) 式を付している。その具体的な形として、例えば1次不等式

$$\sum_{i,j\in W} x_{ij} \le |W|-1,\quad \phi \ne W \subset \{1,2,\cdots,n\} \tag{6}$$

を用いることができる。ここで ϕ は空集合を表し、$|W|$ は集合 W の要素数を表す。これはノード集合 W により閉じた部分巡回路ができていると、W 内のアークが $|W|$ 本以上用いられるので、それを禁止するというものである。この意味で、部分巡回路除去条件と呼ばれている。

部分巡回路除去条件に関して、以下に記す。ノードの総数 $n \le 5$ のときには、明らかに、二つ以上の部分巡回路に分割することができないので、$n \ge 6$ とする。次式を満たす正整数 s を定義する。

$$\frac{n}{2}-1 < s \le \frac{n}{2} \tag{7}$$

部分巡回路のノードの個数は $3,4,5,\cdots,(n-3)$ である。ノード数 $3,4,\cdots,s$ の部分巡回路が存在しなければ、ノード数 $(s+1),(s+2),\cdots,(n-3)$ の部分巡回路は存在しない。ノードの個数 $k\ (k=3,4,\cdots,s)$ の

部分巡回路は、異なる k 個の円順列であり、また、ある巡回の逆向きの巡回は、同じ巡回路とみなすことができる。それ故、部分巡回路の個数は、$(k!)/k$ の半分、すなわち、$(k-1)!/2$ である。ここで、

$$k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 \tag{8}$$

である。n 個の中から異なる k 個 $(k < n)$ を選ぶ組合せの数は、${}_nC_k$ である。ここで、

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{{}_nP_k}{k!} && (9) \\ {}_nP_k &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) && (10) \end{aligned}$$

である。従って、部分巡回路除去のための制約条件式の個数 $v(n)$ は、次のように表される。

$$v(n) = \sum_{k=3}^{s} \frac{{}_nC_k}{r_k} \cdot \frac{(k-1)!}{2} \qquad n \geq 6 \text{ のとき} \tag{11}$$

ここで定数 r_k は、n は偶数、かつ、$k = s$ のときにのみ $r_k = 2$ であり、その他のときには $r_k = 1$ である。$r_k = 2$ とするのは、二つの同数 $(n/2)$ 個の部分巡回路に分割される場合を考慮している。この場合には、一方の巡回路を除去するための制約式を設ければ、他方の巡回路は存在しなくなる。すなわち、$(n/2)$ 個のノードを持つ部分巡回路に対しては、半数だけを制約式とすれば良い。これは、例えば $n = 8$ の場合には $s = 4$ となり、ノード番号 $1,2,3,4$ の部分巡回路を除くために、次式のような制約式のみを設ければ、ノード番号 $5,6,7,8$ の部分巡回路を除くための制約式を設けなくとも良いことを意味している。図1を参照。

$$\text{制約条件} \qquad x_{43} + x_{41} + x_{32} + x_{21} \leq 3 \tag{12}$$

例を示すと、

$$\begin{aligned} v(6) &= \frac{{}_6C_3}{2} \times \frac{2!}{2} = 10 && (13) \\ v(7) &= {}_7C_3 \times \frac{2!}{2} = 35 && (14) \\ v(8) &= {}_8C_3 \times \frac{2!}{2} + \frac{{}_8C_4}{2} \times \frac{3!}{2} = 161 && (15) \end{aligned}$$

3 あとがき

本研究では、巡回セールスマン問題において、ノード i から j へ、あるいは、j から i へ移動する際にかかるコスト（あるいは距離）が等しい場合に、目的関数が1次式で表された定式化を示した。これにより、与えられた任意の個数のノードに対して、整数計画問題を明確に表すことができる。

参考文献

[1] 今野浩、鈴木久敏編「OR ライブラリー7　整数計画法と組合せ最適化」、日科技連、1982年。

[2] 茨木俊秀「組合せ最適化の手法　ー巡回セールスマン問題の例からー」、電気学会論文誌 C 分冊、Vol.114、No.4、pp.411-419、1994年。

[3] 真鍋龍太郎訳「整数計画法」、培風館、昭和51年。

[4] XPRESS-MP　リファレンスマニュアル、シェルサービスインターナショナル株式会社。

[5] 錦織昭峰「数理計画における巡回セールスマン問題の定式化」、広島県立大学紀要、第15巻第1号掲載予定、2003年8月。

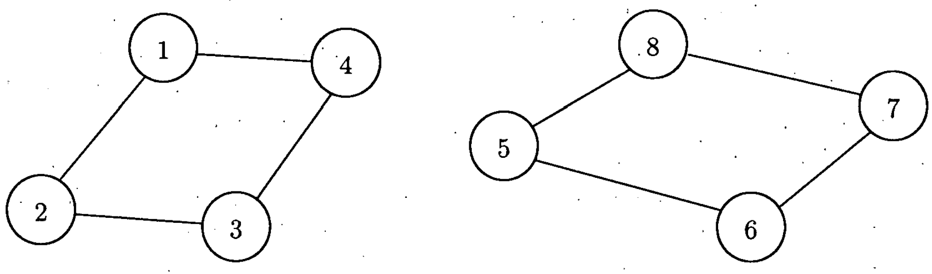

図1　二つの同数ノードの部分巡回路