対称なアフィン二次錐相補性問題に対する行列分割法

京都大学大学院情報学研究科 *林 俊介 HAYASHI Shunsuke
(株)トヨタ自動車 山口 貴大 YAMAGUCHI Takahiro
京都大学大学院情報学研究科 山下 信雄 YAMASHITA Nobuo
京都大学大学院情報学研究科 福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 二次錐相補性問題

l 次元の二次錐 $\mathcal{K}^l$ はユークリッドノルム $\|\cdot\|$ を用いて次のように表される集合である.

$$\mathcal{K}^l = \left\{ (z_1, z_2) \in \Re \times \Re^{l-1} \;\middle|\; \|z_2\| \le z_1 \right\} \tag{1}$$

ただし, $\mathcal{K}^1$ は非負実数の集合である.

二次錐を制約条件にもつような相補性問題を二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem: SOCCP) という. 実際, 二次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming: SOCP) の Karush-Kuhn-Tucker 条件が SOCCP の形で表せることや, 非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem: NCP) が SOCCP に含まれることが知られており, このことからも SOCCP は広いクラスの問題であるといえる.

本報告では, 特に以下のような形で表されるアフィン SOCCP について考える.

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad z \in \Re^n \\ &\text{s.t.} \quad z \in \mathcal{K},\ Mz + q \in \mathcal{K},\ z^T(Mz + q) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, $M \in \Re^{n \times n}$ と $q \in \Re^n$ はそれぞれ与えられた行列とベクトルであり, $\mathcal{K}$ は n_i 次の二次錐を用いて

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m} \tag{3}$$

で定義される凸錐である. ただし, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ である. 以下では, 行列 M が対称である場合についてのみ考える.

2 行列分割法

近年, SOCCP を解くための手法がいくつか提案されている. 特に, SOCCP を等価な最小化問題に再定式化し, それを平滑化法とニュートン法を組み合わせて解く手法 [2] は, 大域的収束性と二次収束性をもち, 少ない反復回数で求めるべき解を得られることが知られている. しかし, 次元の大きな問題では一回の反復に要する計算コストが大きくなるという問題がある. そこで, 本研究では, 大規模問題に対して疎性などの行列の特徴を利用することが可能な行列分割法のアプローチを SOCCP に導入することを考える.

行列分割法では, 元の問題に含まれる行列 M を, 取り扱いやすい構造をもつ行列 B を用いて以下のように分割する.

$$M = B + C$$

そして, M を含む問題を直接解く代わりに, 行列 B のみを含む部分問題を, B の構造を活用して効率的に逐次解くことにより, 元の問題の解に収束する点列を生成する.

以下に SOCCP (2) に対する行列分割法の枠組みを与える.

アルゴリズム 2.1

Step 1. 行列 M の分割 (B, C) を選ぶ. 初期点 $z^0 \in \mathcal{K}$ を選び, $k := 0$ とする.

Step 2. 次式を満たす z を求め, それを z^{k+1} とおく.

$$z \in \mathcal{K},\ Bz + q^k \in \mathcal{K},\ z^T(Bz + q^k) = 0 \tag{4}$$

ただし, $q^k = q + Cz^k$ である.

Step 3. $z^{k+1} = z^k$ ならば, 停止する. さもなければ, $k := k + 1$ とし, Step 1 に戻る.

行列分割法では, 分割 (B, C) をどのように選び, 部分問題 (4) をどのように効率的に解くかが, アルゴリズムの有用性を決める鍵になる.

3 ブロック逐次過緩和法

本節では, 分割 (B, C) を与えるために, 線形相補性問題 (Linear Complementarity Problem: LCP) に対するブロック逐次過緩和法 (ブロック SOR 法) [1] を SOCCP に拡張することを考える. まず, 行列 M を $\mathcal{K}$ の直積構造 (3) に合わせて以下のようにブロック分割する.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \cdots & M_{mm} \end{pmatrix}$$

ここで, $M_{ij} \in \Re^{n_i \times n_j}$ である. このブロック分割を用いて, 行列 B を以下のように選ぶ.

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ M_{21} & B_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{m1} & \ldots & M_{m,m-1} & B_{mm} \end{pmatrix} \tag{5}$$

なお, B_{ii} の選び方は後述する. このように行列 B を選ぶことにより, SOCCP (4) は次の各 $i = 1, \ldots, m$ に対して定義される m 個の部分問題に帰着される.

$$z_i \in \mathcal{K}^{n_i},\ B_{ii} z_i + r_i^k \in \mathcal{K}^{n_i},\ z_i^T(B_{ii} z_i + r_i^k) = 0 \tag{6}$$

ただし, $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m}$, $q^k = (q_1^k, \ldots, q_m^k) \in \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m}$ であり,

$$r_i^k := \begin{cases} q_1^k & (i = 1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} M_{ij} z_j + q_i^k & (i \ge 2) \end{cases}$$

である. 上の問題 (6) は, $i = 1, \ldots, m$ の順に再帰的に解いていくことにより, r_i^k を定数として扱うことができるため, 次元のより小さな SOCCP の列と見なすことができる.

LCP に対するブロック SOR 法では，適当な定数 $\omega \in (0,2)$ を用いて $B_{ii} = \omega^{-1}M_{ii}$ としていた．しかし，SOCCP に対しては同じように B_{ii} を定めても部分問題 (6) を効率的に解くことができない．そこで，以下で定義される関数 $\Gamma : \Re^{l\times l} \times \Re \times \Re \to \Re^{l\times l}$ を用いて，$B_{ii} := \Gamma(M_{ii},\omega,\gamma)$ とする．

$$\Gamma(A,\omega,\gamma) := \begin{pmatrix} \omega^{-1}a_1 & 0^T \\ \gamma a_2 & \omega^{-1}A_3 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

ただし，$\omega > 0$, $\gamma \geq 0$ であり，A は $a_1 \in \Re$, $a_2 \in \Re^{l-1}$, $A_3 \in \Re^{(l-1)\times(l-1)}$ を用いて $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2^T \\ a_2 & A_3 \end{smallmatrix}\right)$ で与えられる対称行列である．

以上のように定められた分割 (B,C) に対して以下の定理が成り立つ．

定理 3.1 行列 M に対する分割 (B,C) において，行列 B を $B_{ii} = \Gamma(M_{ii},\omega,\gamma)$ を用いて (5) 式で与える．さらに，(ω,γ) が以下のいずれかの条件を満たすとする．

(a) $\gamma > 1$ and $0 < \omega \leq 2/\gamma$

(b) $\gamma = 1$ and $0 < \omega < 2$

(c) $0 \leq \gamma < 1$ and $0 < \omega \leq 2/(2-\gamma)$

このとき，各 i に対して B_{ii} は正定値であり，部分問題 (6) の解は唯一存在する．また，アルゴリズム 2.1 で生成される点列は *SOCCP* (2) の解に収束する．

4 部分問題の解き方

本節では，部分問題 (6) を効率的に解く手法を提案する．なお，表記の簡単のため，添字を省略し，以下の SOCCP を解くことを考える．

$$z^T(Bz+r) = 0,\ \ z \in \mathcal{K}^l,\ \ Bz+r \in \mathcal{K}^l \qquad (8)$$

ただし，B は $b_1 \in \Re$, $b_2 \in \Re^{l-1}$ および対称行列 $B_3 \in \Re^{(l-1)\times(l-1)}$ を用いて $B = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & 0^T \\ b_2 & B_3 \end{smallmatrix}\right)$ と表される正定値行列である．

SOCCP (8) の解を z^* とすると，(i) $z^* = 0$, (ii) $z^* \in \operatorname{int}\mathcal{K}^l$, (iii) $z^* \in \operatorname{bd}\mathcal{K}^l\backslash\{0\}$ の 3 つのケースが考えられる．実際，$r \in \mathcal{K}^l$ ならばケース (i) が成り立つ．また，$-B^{-1}r \in \operatorname{int}\mathcal{K}^l$ ならばケース (ii) が成り立ち $z^* = -B^{-1}r$ となる．さらに，解の唯一存在性より $r \notin \mathcal{K}^l$ かつ $-B^{-1}r \notin \operatorname{int}\mathcal{K}^l$ ならばケース (iii) が成り立つが，この場合は B の構造を利用することにより，次のように一変数方程式に帰着できる．

$z^* \in \operatorname{bd}\mathcal{K}^l\backslash\{0\}$ かつ $(z^*)^T(Bz^*+r) = 0$ ゆえ，$Bz^*+r \in \operatorname{bd}\mathcal{K}^l$ となることがわかる．したがって，長さ 1 のベクトル $\tilde{w} \in \Re^{l-1}$ と実数 $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$ を用いて．

$$z^* = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{w} \end{pmatrix},\ Bz^*+r = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{w} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

と書くことができる．ここで，$B = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & 0^T \\ b_2 & B_3 \end{smallmatrix}\right)$ を代入し，μ と z^* を消去することによって，(9) 式はベクトル

$$\tilde{w} = w(\lambda) := -(\lambda I + H)^{-1}(\lambda g + h)$$

のノルムが 1 となるような $\lambda \geq \max\{0, -r_1/b_1\}$ を求める一変数方程式に帰着される．ただし，$H := r_1(b_1 I + B_3)^{-1}$, $g := (b_1 I + B_3)^{-1}b_2$, $h := (b_1 I + B_3)^{-1}r_2$ である．したがって，非線形方程式 $\|w(\lambda)\| = 1$ の解 λ^* を求め，それを (9) に代入すれば，SOCCP (8) の解 z^* が得られる．

以上の議論より，SOCCP (8) を解く手順は次のように与えられる．なお，以下の手順では，信頼領域法におけるアイディアを取り入れ，直接 $\|w(\lambda)\| = 1$ を解くのではなく，等価な方程式 $\|w(\lambda)\|^{-1} - 1 = 0$ をニュートン法と Cholesky 分解を組み合わせて解いている．

手順 4.1

Step 1. $r \in \mathcal{K}^l$ ならば，$z^* := 0$ として終了．

Step 2. $-B^{-1}r \in \operatorname{int}\mathcal{K}^l$ ならば，$z^* := -B^{-1}r$ として終了．

Step 3. さもなければ，次のような手順で解を求める．

- **Step 3-1.** 初期値を $\lambda_0 := \max\{0, -r_1/b_1\}$ とし，$j := 0$ とおく．
- **Step 3-2.** $H(\lambda_j) = RR^T$ となるような *Cholesky* 因子 R を計算し，それを R^j とする．
- **Step 3-3.** $R^j t^j = -(\lambda_j g + h)$ を満たす t^j を求める．
- **Step 3-4.** $(R^j)^T w^j = t^j$ を満たす w^j を求める．
- **Step 3-5.** $\|w^j\| = 1$ ならば，$z^* := \lambda_j(1, (w^j)^T)^T$ として終了．
- **Step 3-6.** $R^j u = w^j$ を満たす u^j を求める．
- **Step 3-7.** $R^j v = w^j + g$ を満たす v^j を求める．
- **Step 3-8.** $\lambda_{j+1} := \lambda_j + (\|w^j\| - 1)\|w^j\|^2/((u^j)^T v^j)$ とする．$j := j+1$ として，Step 3-2 へ．

アルゴリズム 2.1 の各反復において，部分問題である SOCCP (4) を上の手順で解くことにより，SOCCP (2) の解に収束する点列 $\{z^k\}$ を生成することができる．

5 まとめ

本研究では，LCP に対するブロック SOR 法を SOCCP に対して拡張し，それを用いた行列分割法が求めるべき解に収束するための条件を示した．さらに，部分問題を一変数方程式に帰着させ，それを信頼領域法のアイディアを用いて効率的に解く手法を提案した．

今後の課題としては，行列 M が対称でないようなアフィン SOCCP に対する行列分割法の適用，並列計算に適したアルゴリズムの開発などが挙げられる．

参考文献

[1] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, San Diego, 1992.

[2] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, *A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems*, Tech. Rep. 2003-002, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, January 2003.