2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

アフィン変換法を用いたダイナミクスにおけるカオス性

大阪大学大学院工学研究科　山本 洋介　YAMAMOTO Yosuke
01308104　大阪大学大学院工学研究科　*巽 啓司　TATSUMI Keiji
01307844　大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三　TANINO Tetsuzo

1. はじめに

カオスとは, 決定論的に時間発展するシステムにおいて, 内在する非線形性により引き起こされる複雑で長期予測不可能な非周期的挙動のことである. 数理工学の分野では, 最適化問題の近似解法に利用するなどの目的で盛んに研究されている. 対象とされる問題には, NP 困難のクラスに属する組合せ最適化問題や, コンパクト集合上での凹関数や多峰関数の最適解を求める大域最適化問題などが考えられる. このような問題は, 最適解を求める厳密解法では現実的な時間内に解くことが難しく, 準最適解を求める近似的な解法が研究されている. 特に, カオスの非周期的な挙動を生かした探索を行うメタヒューリスティック解法が提案されている [2,3].

本研究では組合せ最適化問題に対する近似解法として, 元の問題の決定変数を連続値に緩和した問題にアフィン変換法を適用する方法に注目する [6]. 緩和の際に目的関数加えるペナルティ項のパラメータの設定を十分小さい負の数にすれば, 探索ダイナミクスにカオスが存在することを指摘し, その理論的検証を行い, 数値例を示す.

2. カオスの定義

本稿では, 形式的カオスもしくは位相的カオスと呼ばれるものを扱う.

定義 1 $f:\Re^n \to \Re^n$ を微分可能な写像とする. $f(z)=z$ であり, 任意の $x \in B_r(z)=\{x\in\Re^n : \|x-z\|\le r\}$ に対して $\nabla f(x)$ の固有値の絶対値が 1 より大きい場合, 点 z を $B_r(z)$ における f の拡大的不動点であるという. さらに, 点 z をある $r>0$ に対して, $B_r(z)$ における f の拡大的不動点であるとし, ある点 $x_0 \in B_r(z)$ $(x_0 \ne z)$ と正の整数 m が存在して,

$$f^{(m)}(x_0)=z \ \text{かつ}\ \det|\nabla f^{(m)}(x_0)| \ne 0$$

を満たすならば, 点 z を f の snap-back repeller という.

このとき n 次元での形式的（位相的）カオスの存在定理は次のように示される.

定理 1 Marottoの定理 [1]

微分可能写像 $f:\Re^n \to \Re^n$ が snap-back repeller をもつならば,

1. ある正の整数 N が存在して, 任意の $p \ge N$ に対して, f は p 周期点をもつ.
2. 非可算無限集合 $S \in \Re^n$ が存在して, S はいかなる周期点も含まず, かつ次の条件を満たす.
   (a) $f(S)\subset S$
   (b) 任意の $x,y\in S$ $(x\ne y)$ に対し,
$$\limsup_{l\to\infty}\|f^{(l)}(x)-f^{(l)}(y)\|>0$$
$$\liminf_{l\to\infty}\|f^{(l)}(x)-f^{(l)}(y)\|=0$$
   (c) 任意の $x\in S$, 任意の周期点 y に対し,
$$\limsup_{l\to\infty}\|f^{(l)}(x)-f^{(l)}(y)\|>0$$

この定理の条件 1, 2(a),(b),(c) を満たすとき Marotto の意味でのカオスと呼ぶ.

3. アフィン変換法を用いたダイナミクス

アフィン変換法は線形計画問題に対する解法として提案され, 近年非線形計画問題にも適用されている方法である [4]. この方法は, 実行可能領域に含まれそれをよく近似する楕円体を生成し, その中を (逐次線形化した) 目的関数を最小化する方向に解を更新していく. 本稿では, 以下のように対象とする問題を 2 次割当て問題とし, この問題を連続緩和しアフィン変換法を適用する. ここで, 等式制約は割当て制約 ($\sum_j^m x_{ij}=1, \sum_i^m x_{ij}=1, i,j=1,\ldots,m, m^2=n$) をあらわすものとし, 本稿では, この x をベクトルとして扱う. また, Q の成分は, $q_{ij}\ge 0,\ (i=1,\ldots,n)$ を満たす [5].

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^{\mathrm T}Qx \\ \text{s.t.} & Ax=b,\ \ x\in\{0,\ 1\}^n \end{array}$$

この問題の等式制約をペナルティ項として目的関数に加え, 決定変数を連続値に緩和した問題を考える.

$$\begin{array}{ll} \min & g(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm T}Wx+\theta^{\mathrm T}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm T}C(e_1-x) \quad (1) \\ \text{s.t.} & 0\le x_i\le 1, \quad i=1,\ldots,n \end{array}$$

ここで, $W:=Q+\gamma A^{\mathrm T}A$, $\theta:=-\gamma A^{\mathrm T}b$ である. この緩和問題の解がすべて, 0-1 値をとるように, 項 $(1/2)x^{\mathrm T}C(e_1-x)$ を付加している. このとき, 解 x の更新式は

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(x(t)) \quad (2) \\ F(x) &:= x+\frac{\Pi(x)d(x)}{\|X^{-1}\Pi(x)d(x))\|+\delta} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} d(x) &:= -\nabla g(x) = -Wx - \theta - \frac{1}{2}Ce_1 + Cx \\ \rho(y) &:= \frac{y^2(1-y)^2}{y^2+(1-y)^2} \\ \Pi(x) &:= \mathrm{diag}\{\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)\} \\ X^{-1} &:= \mathrm{diag}\{1/x_1, \ldots, 1/x_n\} \\ e_1 &:= (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},\ C := \mathrm{diag}\{c, \ldots, c\} \end{aligned}$$

である. また δ は十分小さな正の数とし, (2) 式の第 2 項の分母が 0 にならないように加えたものである. この方法は、超立方体 $\{0,1\}^n$ の頂点を探索する他のメタヒューリスティック解法とは異なった軌道で探索を行い, よりよい準最適解を探索することを目指した方法である.

すべての $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, c, γ が $c - (2\sqrt{n} - 1)\gamma > \sum_{j \neq i}^{n} q_{ij}$ を満たすなら, 問題 (1) の解の要素はすべて 0 または 1 である [6]. ただし, 実際には, 望ましくない局所解にトラップされないよう, 探索初期では c を小さい値とし, 徐々に増加させ最終的に上記条件を満たすように, より効率的な探索を行う. このとき c を十分小さな負値からはじめると, 解の軌道にカオス的挙動が含まれることが期待できる. カオス的挙動が起こる c の条件について以下で解析を行う. ここで, γ は W が正定値行列となる程度大きい値とし, W の最大固有値を $\nu_{\max}$, 最小固有値を $\nu_{\min}$ とあらわし, $c < 0$ とする.

定理 2 内部不動点の一意性　パラメータ c が,

$$c < \min[(1-\sqrt{n})\nu_{\max},\ -4\gamma]$$

を満たすならば内部不動点 $x^*(0 < x_i^* < 1,\ i = 1, \ldots, n)$ が存在し, $x^* = (cI - W)^{-1}(\theta + (1/2)ce_1)$ で一意に定まる.

次に, 内部不動点 x^* が拡大的不動点, さらに, snap-back repeller となる条件について示す.

定理 3 拡大的不動点　パラメータ c が条件

$$c < -16\delta - \max[4\sqrt{n}\nu_{\max},\ 8\gamma]$$

を満たすならば, 内部不動点 x^* は拡大的不動点である.

定理 4 snap-back repeller　ある十分小さな負の数 $c^{(\xi)}$ が存在し, パラメータ c が, 定理 3 の条件と $c < c^{(\xi)}$ を満たせば, 内部不動点 x^* は snap-back repeller である.

上記定理より, 式 (2) で与えられるダイナミクスにおいて c が十分小さな負数であるとき, 内部不動点が snap-back repeller となるため, その生成する点列にカオスが含まれることが分かる. 実際にはそれほど小さくない c でも, 不動点が snap-back repeller となることが数値的にわかる. 9 次元 $(m = 3)$ の場合の適当な問題に対し, $c = -100$ のとき, $F^{(2)}(x(0)) = x^*$ なる初期点 $x(0)$ の存在を数値的に示した.

4. 数値例

問題 (1) の 9 次元 $(m = 3)$ の場合のカオス性を数値例を用いて検証する. $\gamma = 10$, $\delta = 1$ のとき, 更新式 (2) を用いて, 各々の c での x の変化を図 1 により示す.

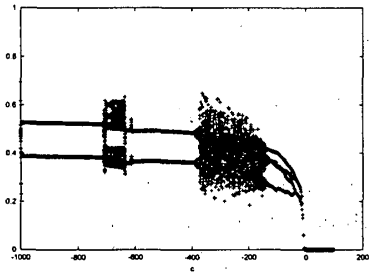

図 1: x の挙動

$c < 0$ の範囲で, カオス的な挙動が生じていることが分かる.

5. おわりに

本論文では, アフィン変換法を用いたダイナミクスにおけるカオスの存在を理論的に示し, ペナルティパラメータに対する十分条件を導出した. また, 数値例も示した. 今後は, この方法を, 実際に 2 次割当て問題に適用し, 他の解法と比較する必要がある. また, 今回は, アフィン変換法を適用する際に割当て制約をペナルティ項として目的関数に加えたが, この制約を緩和問題の制約条件として残した問題に, このダイナミクスを適用した場合のカオス性を考えてみたい. さらに, 他の組合せ問題や, 連続値をとる大域的最適化問題に適用した場合についても検討する予定である.

参考文献

[1] 合原一幸：カオスセミナー, 海文堂 (1994).

[2] L. Chen and K. Aihara : "Chaos and Asymptotical Stability in Discrete-time Neural Networks," *Physica D*, No. 104, pp. 286–325 (1997).

[3] S. Ishii and M. Sato : "Constrained Neural Approaches to Quadratic Assignment Problems," *Neural Networks*, vol. 11, pp. 1073–1082 (1998).

[4] 小島正和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博：内点法, 朝倉書店 (2001).

[5] T. C. Koopmans and M. J. Beckmann : "Assignment Problems and the Location of Economics Activities," *Econometrica*, vol. 25, pp. 53–76 (1957).

[6] K. Tatsumi, Y. Yagi, and T. Tanino : "Improved Projection Hopfield Network for the Quadratic Assignment Problem," *Proceedings of SICE Annual Conference in Osaka*(Japan) (2002).