凸2次計画問題の2次錐計画による解法について

*電気通信大学 後藤 智 GOTOU Satoshi
01605610 電気通信大学 村松 正和 MURAMATU Masakazu

1 はじめに

本研究では, 凸 2 次計画問題を 2 次錐計画問題 (Second-order Cone Programming; 以下 SOCP)[1,2] に変換して解くことを考える. 凸 2 次計画問題は線形制約の元で凸 2 次関数を最小にする問題である. 基本的な最適化問題として歴史があり, 様々な解法が提案されている [3].

凸 2 次計画問題の SOCP への変換方法を, 2 通り考える. 理論的及び, 数値的な考察から, 両者の違いを明らかにすることが, 本研究の目的である.

2 SOCP

ある自然数 N に対し, 集合

$$\mathcal{K}(N) \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \Re^N \,\middle|\, x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^{N} x_j^2} \right\} \subseteq \Re^n \quad (1)$$

は閉凸錐であり, この閉凸錐を N 次元空間の 2 次錐 (second-order-cone) と呼ぶ. n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ を次のように, p 個の部分ベクトルに分解することを考える.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p), \quad \mathbf{x}_i \in \Re^{N_i} \quad (i = 1, \ldots, p).$$

ただし,$N_i\,(i = 1, \ldots, p)$ は $n = \sum_{i=1}^{p} N_i$ を満たす自然数である. このとき,2 次錐の直積

$$\mathcal{K} \equiv \{\mathbf{x} \in \Re^n | \mathbf{x}_i \in \mathcal{K}(N_i)\ (i = 1, \ldots, p)\} \quad (2)$$

を考える. SOCP とは $\mathcal{K}$ を用いて, 以下のように書かれる問題である.

$$\begin{array}{ll} min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{K} \end{array} \quad (3)$$

SOCP は, 以下のような性質を持つ.

1. 非線形制約を持つ, 凸計画問題である.
2. 大規模な問題でも, 効率良く解ける.
3. 双対定理が成り立つ.

特に,$\mathbf{x}_j \in \mathcal{K}(1)$ は $\mathbf{x}_j \geq 0$ を表すので,SOCP は LP を特殊ケースとして含んでいる. すなわち,SOCP は LP の良いところをを保存しつつ, できるだけ, 非線形制約を扱えるようにした,LP の拡張であると言える.

3 凸2次計画問題のSOCPへの変換

凸 2 次計画問題の一般形は以下の式で示される.

$$\begin{array}{ll} min & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad (4)$$

ただし,$\mathbf{V}$ は半正定値対称行列であり,$\mathbf{V} \in \Re^{n\times n}, \mathbf{A} \in \Re^{m\times n}, \mathbf{b} \in \Re^m, \mathbf{c} \in \Re^n$ である.

この問題を次のような手法により SOCP に変換する. 一つ目の手法は, 大きな 1 つの 2 次錐を用いて,SOCP に変換する手法である. 二つ目の手法は, 小さな 2 次錐を複数用いて, SOCP に変換する手法である. 以下,2 つの手法を詳しく紹介する.

3.1 手法1

問題 (4) の半正定値対称行列 $\mathbf{V}$ を, $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ の形に分解することで, 次の形に変形する.

$$\begin{array}{ll} min & \frac{1}{2}\theta + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \| \mathbf{R}^t\mathbf{x} \|^2 \leq \theta \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad (5)$$

ただし,$\mathbf{R} \in \Re^{n\times r}, \mathbf{A} \in \Re^{m\times n}, \mathbf{b} \in \Re^m, \mathbf{c} \in \Re^n, \theta \in \Re$ であり, r は $\mathbf{V}$ のランクである. ここで,

$$\begin{array}{ll} & \| \mathbf{R}^t\mathbf{x} \|^2 \leq \theta \\ \Leftrightarrow & (\frac{\theta+1}{2})^2 \geq (\frac{\theta-1}{2})^2 + \| \mathbf{R}^t\mathbf{x} \|^2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\theta+1}{2} \\ \frac{\theta-1}{2} \\ \mathbf{R}^t\mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{r+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \eta^- \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{r+2}, \begin{array}{r} \eta^+ = \frac{\theta+1}{2} \\ \eta^- = \frac{\theta-1}{2} \\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{R}^T\mathbf{x} \end{array}$$

であるので, 最終的に, 問題 (4) を以下の SOCP に変換することができる.

$$\begin{array}{ll} min & \frac{1}{2}\theta + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \eta^- \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{r+2}, \begin{array}{r} \eta^+ = \frac{\theta+1}{2} \\ \eta^- = \frac{\theta-1}{2} \\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{R}^T\mathbf{x} \end{array} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{6}$$

3.2 手法2

(4) の目的関数を

$$\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{q}_j^T\mathbf{x})^2 \tag{7}$$

と表す. ただし, $\mathbf{R} = [\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r]$ とする. すると,

$$\begin{array}{lll} & min & \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{q}_j^T\mathbf{x})^2 \\ \Leftrightarrow & min & \sum_{j=1}^{r}\theta_j \\ & s.t. & (\mathbf{q}_j^T\mathbf{x})^2 \leq \theta_j (j = 1, \ldots, r) \end{array} \tag{8}$$

が成り立つので, 手法 1 の場合と同様に, 問題 (4) を, 以下のように変形することができる.

$$\begin{array}{ll} min & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\theta_j + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & (\mathbf{q}_j^T\mathbf{x})^2 \leq \theta_j (j = 1, \ldots, r) \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{9}$$

問題 (9) を,SOCP に変換すると以下のようになる.

$$\begin{array}{ll} min & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\theta_j + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{pmatrix} \eta_j^+ \\ \eta_j^- \\ \eta_j \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_3, \begin{array}{r} \eta_j^+ = \frac{\theta_j+1}{2} \\ \eta_j^- = \frac{\theta_j-1}{2} \\ \eta_j = \mathbf{q}_j^T\mathbf{x} \end{array} \\ & (j = 1, \ldots, r), \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{10}$$

4 解析

表 1 に, 手法 1 と手法 2 のそれぞれの SOCP の変数の数, 制約の数, 2 次錐についてまとめた.

	変数の数	制約の数	2 次錐 個数	2 次錐 次元
手法 1	$n+r+3$	$m+r+2$	1	$r+2$
手法 2	$n+4r$	$m+3r$	r	3

表 1: 手法 1 と手法 2 の条件

$\mathbf{V}$ のランクが大きい場合, 手法 2 は手法 1 に比べ,SOCP のサイズが変数の数, 制約の数とも大きくなる. しかし, 手法 2 では, 内点法において探索方向を求める連立一次方程式の係数行列が疎になる性質があり, 実行速度の上で手法 1 より有利となる可能性がある.

また,$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ の分解をする方法として, チョレスキー分解や, 固有値分解が考えられる. どの方法で行列の分解を行うかによっても, 問題を解く速さは変わって来ると予想される.

上に述べた 2 つの手法に対して, 数値実験による検証を行う. 結果は, 当日に報告させていただく. 数値実験には, 村松による, 2 次錐計画に対する主双対内点法の実装である SS[4] を使用する.

参考文献

[1] 田村 明久, 村松 正和, 「最適化法」 共立出版株式会社, 2002.

[2] 村松 正和, 「錐線形計画への招待」, システム/制御/情報, pp. 13-18 Vol. 47 No. 05 2003

[3] DAVID G.LUENBERGER, "Linear and Nonlinear Programming SECOND EDITION", 1984,

[4] SS のホームページ, URL http://jsb.cs.uec.ac.jp/~muramatu/SS/