ウェイトに制約条件が課された下での デザイングラフの統計的信頼度

申請中 日本大学生産工学部 ○ 肥田　裕子
Nihon University HIDA Yuko
02602260 日本大学生産工学部 三宅　千香子
Nihon University MIYAKE Chikako
01205220 日本大学生産工学部 篠原　正明
Nihon University SHINOHARA Masaaki

1　はじめに

AHP などの意思決定過程のある段階においては、n 個の項目ウェイトを n 個の項目間の一対比較情報に基づき推定する必要が生じる。この時に、n 個の項目間の ${}_nC_2$ 個の完全一対比較情報が入手可能とは限らない。さらには、効率的一対比較作業という観点からは意識的に不完全情報を収集することも考えられる。
一対比較デザイングラフとしては木状（トリー状）、ループ状、2重ループなどがあり、さらに、ウェイト推定条件としても、ウェイト総和一定あるいは特定ウェイト基準指定などが考えられ、これらの条件下の推定ウェイトの統計的信頼度をLLS（対数最小二乗法）に基づき評価する。
２章では、６項目の場合について考慮する３つのデザイングラフを示し、３章では、制約条件下の分散・共分散行列 $V(\hat{\mathbf{p}})$ を導出し、４章では、ウェイト総和一定ならびに特定ウェイト基準指定の下での統計的信頼度を評価する。

2　デザイングラフの例

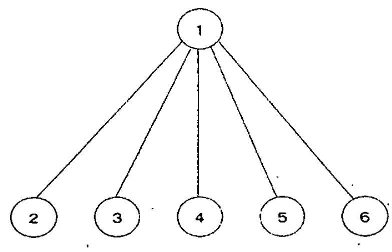

図 1: 木状

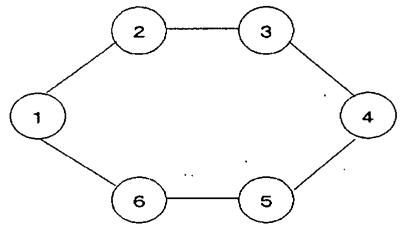

図 2: 1サイクル

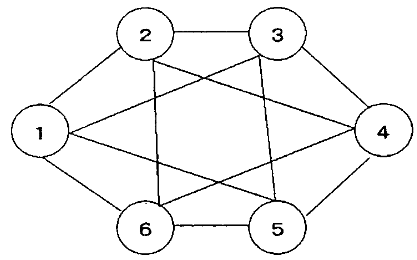

図 3: 2サイクル

3　制約下の統計的信頼度

LLS での標本誤差モデル式を (1) 式、パラメータベクトル $\mathbf{p}$ 制約式を (2) 式で与える。

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p} + \varepsilon \tag{1}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{p} \tag{2}$$

(1) と (2) をまとめて、(3) 式で表現する。

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{3}$$

但し、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$B = \begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{6}$$

誤差二乗和 $z = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}(= \varepsilon^{\mathbf{T}}\varepsilon)$ をパラメータベクトル $\mathbf{p}$ で偏微分して零と置き、最小二乗推定値 $\hat{\mathbf{p}}$ を求める。

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \tag{8}$$

$\hat{\mathbf{p}}$ の分散共分散行列 $V(\hat{\mathbf{p}})$ は次式で評価できる。

$$V(\hat{\mathbf{p}}) = \sigma^2(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1} \tag{9}$$

但し、$V(\varepsilon) = \sigma^2 I$ とする。
(9) 式は (2) 式でパラメータベクトルに線形制約が課された場合の分散共分散行列を陽に与える式であり、例えば、無制約の場合は、$A = 0$ とすると、

$$V(\hat{\mathbf{p}}) = \sigma^2(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1} \tag{10}$$

となり、従来結果に一致する。

さらに、ウェイト総和一定（$\sum u_i = 1$ あるいは $\sum u_i = 0$) では、$A = \mathbf{1}^{\mathbf{T}}$ すなわち、$A^T A = \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathbf{T}} = \mathbf{J}$ (全要素 1 の行列)、特定ウェイト基準指定 ($u_i = 1$) では、$A = (1, 0, \cdots, 0)$ すなわち、$A^T A = E_{1,1}$ ((1,1) 要素が 1 で他は全て零の行列) となる。

4 統計的信頼度の評価例

2 章で示した 3 つのデザイングラフについて、パラメータベクトル制約として、(無制約,$\sum u_i = 1$,$u_1 = 1$) の 3 つの場合について、各項目のウェイト推定値の標準誤差 (分散共分散行列 $V(\hat{\mathbf{p}})$ の対応する対角要素の平方根) を以下に計算する。

4.1 木状

項目	無制約	$\sum u_i = 1$	$u_1 = 1$
①	0.16666	0.1388	0
②	0.8333	0.8055	1.0000
③	0.8333	0.8055	1.0000
④	0.8333	0.8055	1.0000
⑤	0.8333	0.8055	1.0000
⑥	0.8333	0.8055	1.0000

4.2 1 サイクル

項目	無制約	$\sum u_i = 1$	$u_1 = 1$
①	0.5138	0.4861	0
②	0.5138	0.4861	0.8333
③	0.5138	0.4861	1.3333
④	0.5138	0.4861	1.5000
⑤	0.5138	0.4861	1.3333
⑥	0.5138	0.4861	0.8333

4.3 2 サイクル

項目	無制約	$\sum u_i = 1$	$u_1 = 1$
①	0.2083	0.1085	0
②	0.2083	0.1085	0.4166
③	0.2083	0.1085	0.4166
④	0.2083	0.1085	0.5000
⑤	0.2083	0.1085	0.4166
⑥	0.2083	0.1085	0.4166

5 考察

- 無制約と総和一定では標準誤差に関して同傾向が観察される。たとえば、木状では項目 1 と 2 での差は同じである。

- 特定ウェイト基準指定は、ある特定基準項目のウェイトを外生的に一定値に固定する状況であり、ある意味での絶対評価を反映している。当然のことながら、固定した項目 1 の標準誤差は零である。項目 1 から離れた項目の標準誤差は増加する傾向にある。

6 おわりに

推定ウェイトに総和一定あるいは基準値固定などの制約条件が存在する場合について推定ウェイトの統計的信頼度（ばらつき度合）を表現する標準誤差の公式を導出し、それを用いて 6 項目ノードのデザイングラフの 3 つのトポロジに適用した。全項目ウェイト総和を一定にするという条件はある意味で相対評価的であり、一部項目ウェイトを基準値として固定する条件はある意味で絶対評価である。今後は、様々なトポロジならびに制約条件に本アプローチを適用し、理論と実際の融合をはかりたい。