AHPにおけるウェイト推定法と誤差行列の関係

01104400　法政大学　加藤 豊　KATO Yutaka
01007500　慶応義塾大学　＊小澤 正典　OZAWA Masanori

1. 誤差行列と推定法

一対比較行列を $A = (a_{ij})$ としたとき，あるウェイト推定法で求めたウェイトを $\hat{w}_i$ とすると，その誤差行列 $B = (b_{ij})$ をつぎのように定義する.

$$b_{ij} = a_{ij}\frac{\hat{w}_j}{\hat{w}_i}$$

この誤差行列は，もとの一対比較行列 (a_{ij}) と同じ固有値を持つが，ウェイトの推定法が一般的に使用される固有ベクトル法のときは，その行和はすべて一定値 (最大固有値 $\lambda_{\max}$) となる．このときの誤差行列における最大固有値に対応する固有ベクトルの各要素は，すべて同じ値である．ウェイト推定法が左固有ベクトル法 [3] である場合，その推定ウェイトは，一対比較行列の転置行列における固有ベクトルの要素の逆数である．このときには，誤差行列の列和がすべて一定値 ($\lambda_{\max}$) となる．幾何平均法でウェイトを推定した場合は，誤差行列の各行の要素の積がすべて一定値 (1) となる．

このように，誤差行列には一対比較行列に含まれる誤差の影響が現われると共に．そのウェイト推定法による影響も現われることになる．

2. 系統的な誤差との関係

一対比較行列に含まれる誤差が，系統的な誤差の場合について考える．ここでの系統的な誤差は，一対比較値の大きさによって変化するような誤差であり，比較値 w_i/w_j をある関数で変換して一対比較値が決ることを想定し，これにより生じる誤差のことである．

$$a_{ij} = f(w_i/w_j)$$

言い換えれば，評価者が一対比較してその値を数値化して表を埋める際に，値をある関数により変換してから記入することによる誤差である．

系統的な誤差を表す関数 f としては，つぎようなものを考える．

1. 指数関数型
   $$f(x) = a\exp(x) + b$$
2. 対数関数型
   $$f(x) = a\log(x) + b$$

このとき，一対比較行列に逆数性 (reciprocal) を仮定する場合には，$w_i/w_j \geq 1$ の要素について系統的な誤差を導入し，その対称要素の値にはその逆数を使用するものとする．

系統的な誤差がある場合に，固有ベクトル法を使用したときの誤差行列における係数は，例えば行列-1(指数関数型), 行列-2(対数関数型) のようになる．

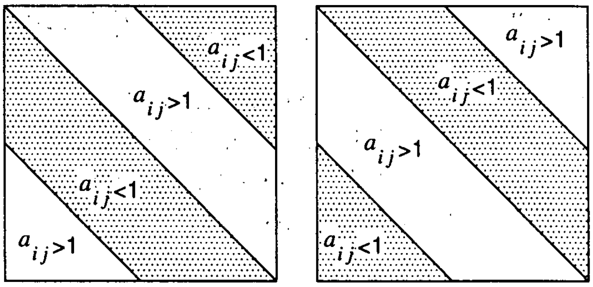
行列-1 (指数関数型)

$$\begin{pmatrix}
1.000 & 1.008 & 1.012 & 1.012 & 1.007 & 0.999 & 0.988 & 0.975 \\
0.992 & 1.000 & 1.007 & 1.010 & 1.009 & 1.003 & 0.995 & 0.985 \\
0.988 & 0.993 & 1.000 & 1.007 & 1.009 & 1.007 & 1.002 & 0.995 \\
0.988 & 0.990 & 0.993 & 1.000 & 1.007 & 1.009 & 1.008 & 1.005 \\
0.993 & 0.992 & 0.991 & 0.993 & 1.000 & 1.008 & 1.011 & 1.012 \\
1.001 & 0.997 & 0.993 & 0.991 & 0.992 & 1.000 & 1.010 & 1.016 \\
1.013 & 1.005 & 0.998 & 0.992 & 0.989 & 0.990 & 1.000 & 1.014 \\
1.026 & 1.016 & 1.005 & 0.995 & 0.988 & 0.984 & 0.987 & 1.000
\end{pmatrix}$$

行列-2 (対数関数型)

$$\begin{pmatrix}
1.000 & 0.986 & 0.978 & 0.978 & 0.985 & 0.999 & 1.022 & 1.054 \\
1.015 & 1.000 & 0.988 & 0.983 & 0.985 & 0.993 & 1.008 & 1.030 \\
1.022 & 1.012 & 1.000 & 0.990 & 0.986 & 0.988 & 0.995 & 1.008 \\
1.023 & 1.017 & 1.010 & 1.000 & 0.991 & 0.986 & 0.986 & 0.989 \\
1.016 & 1.016 & 1.014 & 1.010 & 1.000 & 0.989 & 0.981 & 0.976 \\
1.001 & 1.007 & 1.012 & 1.014 & 1.011 & 1.000 & 0.985 & 0.971 \\
0.979 & 0.992 & 1.005 & 1.014 & 1.019 & 1.015 & 1.000 & 0.977 \\
0.949 & 0.971 & 0.992 & 1.011 & 1.025 & 1.030 & 1.024 & 1.000
\end{pmatrix}$$

これらは，項目数 $n = 8, w_i = (n - i + 1)/n, a = 1, b = 0$ としたときの誤差行列である．したがって，パターン的には 図-1 となる．これらの係数のパターンは，ウェイトの推定法を代えても大きな違いは生じない．よって，このパターンを利用することにより，その系統的な誤差におけるパラメータ a, b を推定することが可能である．



指数関数型　　対数関数型

図 1 : 誤差行列の係数のパターン

また，1 より大きくなるすべての要素を関数で変換するのでなく，ある項目に関する要素だけ（1 より大きい）大きくなる誤差パターンを考える．

$$a_{ij} = \begin{cases} f(w_i/w_j) & i = k \\ w_i/w_j & i \neq k \end{cases}$$

このような誤差の場合，その誤差が含まれた項目 (k) を境にして，推定ウェイトが大きくなるものと，小さくなるものに分かれる．

例 : 項目数 6, $k = 3$, $f(x) = 4x$ における誤差行列

$$\begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 & 2.072 & 0.755 & 0.755 & 0.755 \\ 1.000 & 1.000 & 2.072 & 0.755 & 0.755 & 0.755 \\ 0.483 & 0.483 & 1.000 & 1.457 & 1.457 & 1.457 \\ 1.325 & 1.325 & 0.686 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.325 & 1.325 & 0.686 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.325 & 1.325 & 0.686 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

他の幾何平均法や一般平均法などを利用する場合は，そのウェイト推定は一対比較行列の各行の値のみから計算されるので，この誤差の影響で第 k 項目のウェイトだけ大きくなるが，一般的な固有値法や転置行列を使用する左固有ベクトル法の場合には，その影響が他のウェイトに波及する．

3. 一対比較における矛盾

一対比較において，つぎのような明かな矛盾を生じている場合がある．

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1/\beta \\ 1/\alpha & 1 & \gamma \\ \beta & 1/\gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 1$$

このときよく知られた推定ウェイトを使用した場合には，誤差行列にもこの矛盾は残ることになる．このような矛盾は，固有ベクトル法を使用した場合の誤差行列において，行和が同じ値になるので必ず存在する．誤差行列の最大固有値は，矛盾を生じている部分の影響を受けるため，一対比較行列の部分行列に上記のような矛盾する部分 (3×3) があると，

$$\lambda_{\max} \geq \frac{1}{n} \cdot \left\{ 3\left(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} + 1/\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \right. \right. \\ \left. \left. + n^2 - 6 \right) \right\}$$

となる．また，このような矛盾がある場合，推定方法によりその推定ウェイトの性質も大きく変わる．例えば，真のウェイトを $w_1 = w_2 = \cdots = w_{n+3} = 1/(n+3)$ として，その誤差を含んだ一対比較行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1/\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1/\alpha & 1 & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1/\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

が与えられたものとする．このとき，最大固有値に対応する固有ベクトルは，

$$x_1 = x_2 = x_3 = n,$$
$$x_4 = \cdots = x_{n+3} = \lambda_{\max} - 1 - \alpha - 1/\alpha \ (= \mu)$$

となる．よって，固有ベクトル法の推定ウェイト $\hat{\boldsymbol{w}}$ と真のウェイト $\boldsymbol{w}$ との差と，左固有ベクトル法による推定ウェイト $\tilde{\boldsymbol{w}}$ との差は，

$$\frac{\|\hat{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{w}\|_2}{\|\tilde{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{w}\|_2} = \frac{3\mu + n^2}{n\mu + 3n}$$

という関係になり，$n > 3$ であるならば左固有ベクトル法がよいことが分かる．(注 : 幾何平均法ならば真のウェイトと一致する．)

4. まとめ

誤差行列は，その一対比較行列に対して推定ウェイトを使用した後の残差行列と解釈してよいので，この行列の特徴を調べることにより，その一対比較における誤差の含まれ方を推定することが可能である．この特徴は，使用したウェイト推定法により違いが変わる部分もあるので，そのウェイト推定法の特徴を調べることも可能である．

参考文献

[1] T.L. Saaty, "The Analytic Hierarchy Process", McGraw-Hill, 1980.

[2] 小澤正典, 加藤豊, "AHP における一般平均法のパラメータと誤差" 日本 OR 学会度春季研究発表会 アブストラクト集, 2000

[3] 加藤豊，小澤正典, "行列ノルムによる一対比較行列からのウェイト推定", 日本 OR 学会度春季研究発表会 アブストラクト集, 2002