不完全情報下のAHPウェイト推定法の性能比較(その1)
― シミュレーション実験枠組 ―

02602260 日本大学生産工学部 ○ 三宅 千香子
Nihon University MIYAKE Chikako
01011500 日本大学生産工学部 大澤 慶吉
Nihon University OSAWA Keikichi
01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University SHINOHARA Masaaki

1 はじめに

一対比較デザイングラフが不完全グラフで与えられる場合の一対比較測定データ値集合から各項目のウェイトを推定するアルゴリズムとしてHarker法(HK), 二段階法(TS), 関谷法(ST), 列要素正規化法(CN), 算術平均法(AM), 幾何平均法(GM), パス代数法(PA)の総計で7つのアルゴリズムの真値推定能力を, 枝疎密度の異なるデザイングラフのトポロジーに対して, 統計的にシミュレーションに基づき比較評価する.

2 推定法の説明

2.1 Harker法$(HK)\ldots$添字1

対象iの真の値を$u_i(i=1\sim n)$とするとき, もし(i,j)要素が欠落するなら, これを$\frac{u_i}{u_j}$で置き換えてできる一対比較行列を考え, その主固有ベクトルを求める. すなわち欠落要素を0と置き, 対角元はその行の欠落個数に1を加えたのもを置き一対比較行列の主固有ベクトルを計算する.

2.2 二段階法$(TS)\ldots$添字2

欠落要素を何らかの手法(第一段階法)で求めたウェイトの比で代入し, その一対比較行列に対して完全情報下のAHPウェイト推定方法を適用.

2.3 パス代数法$(PA)\ldots$添字3

デザイングラフGが完全グラフの場合, 主固有ベクトル$\mathbf{x}$は次式で表現できる.

$$\mathbf{x}=\lim_{\mathbf{k}\to\infty}\frac{\mathbf{A^ke}}{\mathbf{e^TA^ke}} \tag{1}$$

$$\mathbf{x}=\lim_{\mathbf{N}\to\infty}\frac{\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{N}}\mathbf{A^ke}}{\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{N}}\mathbf{e^TA^ke}} \tag{2}$$

また, デザイングラフGが不完全グラフの場合, 一対比較を行わない部分に対応する$a_{ij}=0$とし, その他の一対比較を行う枝が存在する部分ついてはa_{ij}をそのまま用いた一対比較データ行列Aを用いて, (1)式あるいは(2)式を適用してウェイトベクトルを求める.

2.4 関谷法$(ST)\ldots$添字4

一対比較測定行列$A=\{a_{ij}\}$を行ごとに非零非対角成分数でa_{ij}値を除して, パワー法を用いて推定する方法である.…別名「行要素数正規化法」.

2.5 列要素数正規化法$(CN)\ldots$添字5

一対比較測定行列$A=\{a_{ij}\}$を列ごとに非零非対角成分数でa_{ij}値を除して, パワー法を用いて推定する方法である.

2.6 算術平均法$(AM)\ldots$添字6

一対比較比較行列$A=\{a_{ij}\}$の欠落部分を0にして, 対角要素を1とし, 非零要素の数で行毎の和の算術平均をとる.

2.7 幾何平均法$(GM)\ldots$添字7

一対比較測定行列Aの行毎の非欠落要素に関する幾何平均値の平均を求め, 推定する方法である.

3 シミュレーション実験

3.1 手順

真のウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^0$ を仮定し、この真のウェイトベクトルから整合性を持つ一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ を生成する。(但し、$a_{ij} = w_i^0/w_j^0$) $i, j = 1, \cdots, n$)
そして、この A に適当な確率分布に基づく摂動を与える。さらに、摂動後の一対比較行列の母集団を M とする。母集団 M に属する l 番目の標本一対比較行列を $S(l) = \{s_{ij}(l)\}$ とすると、$s_{ij}(l)$ と a_{ij} は一般には、次式で関係づけられる。

$$s_{ij}(l) = f(a_{ij}, r_{ij}(l)) \tag{3}$$

但し，$r_{ij}(l)$ は，l 番目の標本一対比較行列 $S(l) = \{s_{ij}(l)\}$ の (i, j) 要素 $s_{ij}(l)$ に付随した摂動のための確率乱数値であり，適当な確率分布に従う確率変数 R の実現値である。母集団 M に属する標本一対比較行列 $S(l) = \{s_{ij}(l)\}$ に対して，枝欠損度の異なる複数の一対比較行列を生成し，7 つのウェイトベクトル推定法、HK 法，TS 法，PA 法，ST 法，CN 法，AM 法，GM 法を適用して、ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^i(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ を計算する。ウェイトベクトル間の距離に基づき，HK 法，TS 法，PA 法，ST 法，CN 法，AM 法，GM 法の各ウェイトベクトル推定法で推定されるウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^1, \ldots, \boldsymbol{w}^7$ の相対位置関係ならびに真のウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^0$ への近接度合を評価する。

3.2 乗法形誤差と加法形誤差の定義

一対比較行列の測定値を $A = \{a_{ij}\}$，整合行列を $W = \{w_{ij}\}(w_{ij} = w_i/w_j)$，誤差行列部分を $E = \{e_{ij}\}$ とすると，一般に，A は W と E の関数で表せる．

$$A = f(W, E) \tag{4}$$

乗法形誤差行列 E では，関数 $f(W, E)$ が (5) 式，加法形誤差行列 E では，関数 $f(W, E)$ が (6) 式で表される．

$$f(W, E) = W * E \tag{5}$$

$$f(W, E) = W + E \tag{6}$$

ここで，(5) 式の*は要素毎の積 (elementwise product) を表す行列演算であり，$D = B * C$ において $d_{ij} = b_{ij} \times c_{ij}$ となる．又，(6) 式の+は通常の行列加算である．すなわち，$D = B + C$ において，$d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ となる．

3.3 距離のとり方

次式のユークリッド距離 (L_2-計量ノルム) を採用する。

$$D(\boldsymbol{w}^i, \boldsymbol{w}^j) = \left(\sum_{k=1}^{n}(w_k^i - w_k^j)^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

$$DL(\boldsymbol{w}^i, \boldsymbol{w}^j) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\log w_k^i - \log w_k^j)^2\right)^{1/2} \tag{8}$$

3.4 整合行列とランダム行列

3.4.1 整合行列

- **真のウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^0$ の仮定**
  実験で用いる真のウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^0$ を次式
  $\boldsymbol{w}^0 = \dfrac{2}{n(n+1)}[n, n-1, \cdots, 1]^T$
  で与える。
  そして，$w_{ij} = w_i/w_j(i = 1, \ldots, 6)$ を計算し整合行列を作成する．

3.4.2 ランダム行列

- **加法形誤差と乗法形誤差**
  乗法形誤差ならびに加法形誤差により整合行列を摂動したランダム行列を生成した．
- **データの収集法**
  母集団から抽出した標本数を m とし，m 個の標本について平均した以下の指標を計算する．

$$\overline{D}_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} D(\boldsymbol{w}^i(l), \boldsymbol{w}^j(l)) \quad (i, j = 0, \ldots, 8) \tag{9}$$

但し、i=0:真の値，i=1:HK 法，i=2:TS 法，i=3:PA 法，i=4:ST 法，i=5:CN 法，i=6:AM 法，i=7:GM 法，である。$\overline{DL}_{ij}$ についても同様に計算する．