施設の勧誘力を考慮した競合施設配置問題

近畿大学　更井絵満　SARAI Ema
01602685　近畿大学　松冨達夫　MATSUTOMI Tatsuo
01005195　大阪大学　石井博昭　ISHII Hiroaki

1．問題の定式化

顧客が存在し各企業が施設を配置可能な空間を閉集合$S \in R^2$で与える。顧客の分布はS内の有限個の点の集合点で表されると仮定し、各点における index を$i \in I$とおく。各指標$i \in I$について、点の位置を$(x_i, y_i) \in S$おき、顧客の位置の集合を$X = \{ (x_i, y_i) | i \in I \}$で表わす。また、顧客の購買力を$w_i \in [0, \infty)$とおく。競合する2企業において、先手企業をA、後手企業をBで表わし、各企業はL種類のレベルの施設を配置可能とする。各企業の施設をA, Bと表わす。各施設$F \in \{A, B\}$に対して、その施設の位置を$(X_F, X_F) \in S$とおく。各企業が配置する施設のレベルを$l_A\ l_B$とし、1以上L以下の自然数で与える。各レベル$l \in \{1, \ldots L\}$に対して、$k_l \in [1, \infty)$を施設の勧誘力を表わす値とする。また、k_iは$\infty > k_1 > k_2 > \ldots > k_L = 1$の関係式を満たすとする。各企業がレベル$l$の施設を配置する時にかかるコストを$C_l \in (0, \infty)$とおく。ここで、$C_l$は$0 < C_1 < C_2 \cdot \cdot \cdot < C_L < \infty$　を満たすとする。

また、施設$F = \{A, B\}$の施設の勧誘力、建設費をそれぞれk_F, C_Fで表わす。

顧客iと施設Fとの間の距離をd_{iF}とし、本研究では、2点間の距離を直線距離で定義する。複数の施設に対して、顧客は勧誘力と距離の積が最も小さい施設のみ利用すると仮定する。また、2つ以上の施設について距離が等しい場合、顧客は最も早く配置された施設のみ利用すると仮定する。施設Fが獲得した顧客の index をN_Fとし、次の関係式を満たす。$N_A \cup N_B = I \quad N_A \cap N_B = \phi$
ここでは顧客から得られる企業の売上は施設の獲得購買力の総数に等しいと仮定する。このとき、企業A, Bの施設配置問題は次の利得最大化問題$P_A\ P_B$として定式化される。

$$P_A \qquad \max_{(x_A, y_A), l_A} \sum_{i \in N_A} w_i - \sigma C_A,$$

$$P_B \qquad \max_{(x_B, y_B), l_B} \sum_{i \in N_B} w_i - \sigma C_B,$$

ここで$\sigma \in [0, \infty)$は売り上げに対する建設費の重要度を意味する定数である。

2．解法手順

前節では、競合施設配置問題を各企業の利得最大化問題$P_A\ P_B$として定式化した。次に、各企業の最適配置について考察する。

問題を解くにあたって、企業A, Bのレベルの高低の関係から3つの場合に分けられる。

1) Case 1　：$l_A = l_B$
2) Case 2　：$l_A < l_B$
3) Case 3　：$l_A > l_B$

Case 1：先手企業と後手企業のレベルが同じ場合
まず$l_A = l_B$である場合、この問題は Drezner のモデルと同様に扱うことができる。

Case 2：先手企業のレベルが後手企業のよりも低い場合
$l_A < l_B$である場合、次の補助定理が明らかに成り立つ。

補助定理1：施設Aに関する任意の施設配置$(x_A, y_A) \in S, 1 \le l_A < L$に対して、施設$B$のレベルが$l_B > l_A$であるとする。このとき、施設$B$の最適な配置場所の一つは点$(x_B, y_B) = (x_A, y_A)$に配置することである。

補助定理より、各企業の施設配置について次の定理が明らかに成り立つ。

定理2　$l_A < l_B$を仮定する。このとき、施設Aの最適配置は共に購買力の最も大きい点上に配置することであり、施設Bの最適配置は施設Aと同じ位置に施設を配置することである。

Case 3：先手企業のレベルが後手企業よりも高い場合
$l_A > l_B$である場合、施設Bの獲得できる顧客の存在領域は以下のように表わすことができる。

$$\left(x - \frac{k_B^2 x_B - k_A^2 x_A}{k_B^2 - k_A^2} \right)^2 + \left(y - \frac{k_B^2 y_B - k_A^2 y_A}{k_B^2 - k_B^2} \right)^2 < \left(\frac{k_A k_B}{k_B^2 - k_A^2} d_{AB} \right)^2, \quad (1)$$

式(1)より，施設Bの獲得できる顧客の存在領域はで、半径が次式であるような円の内部である。

$$\left(\frac{k_A k_B}{k_B^2 - k_A^2} d_{AB}\right)$$

ここでd_{AB}は施設A,B間の距離である。
本研究ではこの獲得顧客の存在領域を表わす円のことを獲得顧客円と呼ぶことにする。

次に、施設の配置場所に対する獲得顧客に対する獲得顧客の集合に注目する。顧客の全体集合Iから任意の顧客を選択し、これらの顧客から部分集合を形成する。そして、この部分集合の顧客を包含する最小の半径を持つ円を考察する。このとき、これらの円は次の3つのいずれかにより表現される。

- Type1) 顧客の存在する点を中心とし、半径0の円
- Type2) 顧客の存在する2点を直径とする円
- Type3) 鈍角三角形を形成する顧客の存在する3点に対する外接円

Type 1～3によって表現される円に対して、それらの円の総数をとNとおくと、Nの値は次のような式により与えられる。

$$N = \binom{h}{1} + \binom{h}{2} + \binom{h}{3} = \frac{h(h^2+5)}{6}, \qquad (2)$$

そして、各円に対して、円の内部に存在する顧客の購買力の和の多い順に index $n \in \{1,\ldots,N\}$を付ける。さらに、各円に対する中心、半径、および内部に存在する顧客の指標の全体集合を、各々c_n, r_n, I_n とおく。これらのデータは施設配置問題を解く前提として求めておく必要がある。このとき、次の補助定理が成り立つ。

補助定理3:
各施設のレベルが$l_A > l_B$ となるように固定されており、企業Aがすでに施設を配置したとする。任意の index $n \in \{1,\ldots,N\}$ に対して、施設Bの獲得顧客の中心が点 c_n となる位置に配置したとき、施設Bは集合 I_n上の一部の顧客からのみ購買力を獲得できるが、すべての顧客については購買力を獲得できないとする。このとき、S上の任意の施設配置点に対して、企業BはI_n上の一部の顧客からのみ購買力を獲得できるが全ての顧客については購買力を獲得できない。
補助定理3より企業Bの最適配置について次の定理が明らかに成り立つ。

定理4　各施設のレベルが$l_A > l_B$となるように固定されており、企業Aが既に施設を配置したとする。このとき、施設Bの最適な配置位置の1つは施設Aの配置点と点c_nを$k_B^2 - k_A^2$ ： k_A^2　に内分する点であり、そのときの企業B獲得購買力の総和は$\sum_{i \in I_n} w_i$ で与えられる。ここで$\bar{n}$企業Bが点c_nに施設を配置した時にI_n上の全ての顧客を獲得できる点のうち、nが最小の値をとる。

次に、企業Aの最適配置について考察する。施設Aの配置候補点とc_nとの距離をd_{An}とおく。このとき

$$d_{An} \le \frac{k_B}{k_A} r_n$$

であれば、企業Bは点c_n上に獲得顧客円の中心をおいてもI_n上の全ての顧客を獲得することはできない。この式を満たす施設Aの配置候補点の集合をS_A^nとおく。よって、企業Aの最適配置を求めるアルゴリズムは以下で与えられる。

3．解法アルゴリズム

Step 0 (初期条件):
$m=0$ とおき、全ての$\forall n \in \{1,\ldots,N\}$に対して$S_A^n = S$, とおく.

Step 1 (集合の導出):
$m = m+1$とし、 S_A^m を求める

Step 2 (判定条件)
もし$\bigcap_{n=1}^{N} S_A^n \ne \phi$ならばStep 1に戻る。

Step 3(最適解の導出):
$n^* = m-1$で与えられ、企業Aの最適配置点の集合は$\bigcap_{n=1}^{n^*} S_A^n$ である。
また、このときの企業Bの最適配置点の1つは点$c_{\bar{n}}$である。さらに、このときの企業A,Bの獲得購買力はそれぞれ $\sum_{i \in I \setminus I_{\bar{n}}} w_i \sum_{i \in I_{\bar{n}}} w_i$ で与えられる

4．おわりに

ここでは、競合状態にある2つの施設のレベルを考慮した場合の配置問題に対する解法アルゴリズムを提案した。顧客がいずれの施設に利用するかは、確定的に決まることを前提としたが、実際にはそうでない場合の方が一般的なように思われる。また、需要の位置も事前に明確ではないこともある。このような場合について今後研究を進めていく予定である。

参考文献

1. R.E.Wendell and R.D.McKelvey"New perspectives in competitive location theory." European Journal of Operational Research 6, 1981, 174-182.
2. Z.Drezner, "Competitive location strategies for two facilities." Regional Science and Urban Economics 12, 1982, 485-493.