需要が不確実な場合の最適施設配置

02103800 筑波大学 *窪田 順次 KUBOTA Junji
01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu

1．はじめに

施設の立地を考えるとき，利用者からの移動距離を小さくするように立地点を選ぶことは，利用者側にとっても，施設への需要増を望む供給者にとっても重要なことである．しかし，多くの場合，将来の施設利用者の分布を予測することは困難であり，不確実性の存在の下で立地点を決定せざるを得ない．人口変動や人口構造の変化が著しい場合には利用者の分布に対し，結果的に不便な立地点を選ぶリスクを伴う．このような状況下での施設配置はより戦略的に行われるべきであり，既往研究では Drezner and Guyse(1999)，窪田・鈴木(2002)がリグレットの概念を用いて，需要分布が複数のシナリオとして想定されるときの施設立地の分析を試みている．

本稿では各点の需要が不確実である場合の施設配置問題を扱い，最適配置点の散らばりまたは，移動距離またはリグレットを用いた決定基準による最適配置にどのように影響するかを見る．

2．最適配置点の分布関数と確率分布

施設配置の基本的モデルであるウェーバー問題は，施設利用者の離散分布を仮定したときの施設までの総移動距離最小化を与える施設立地点を決める問題である．ウェーバー問題では利用者分布既知を仮定しているが，本稿では線分上に分布する需要が互いに独立な確率変数である場合の一施設配置を考える．

以下では，各点の需要量が $w_i(i=1,\ldots,n)$ であるときの施設立地点 a までの重み付き距離 $w_i d_i(a)$ の総和を総需要量で除した単位需要量あたりの移動距離（以下，移動距離）を $T(a)$ とし，これを最小化する立地点を最適配置点 a^* と呼ぶ．二乗距離で測った場合，最適配置点 a^* は次のように定義される．

$$a^* = \arg\min_a \quad T(a) = \sum_i w_i d_i(a) \Big/ \sum_i w_i \tag{1}$$

最適配置点がある場所 a 以下となる確率の分布，つまり最適配置点の分布関数 $G(a)$ は同時確率分布 $P(w_1,\ldots,w_n)$ を用いると(2)式のように定義できる．

$$G(a) = \int\cdots\int_{a^*<a} P(w_1,\ldots,w_n)dw_1\cdots dw_n \tag{2}$$

$$g(a) = \partial G / \partial a \tag{3}$$

最適配置点の確率密度 $g(a)$ は分布関数の変化率として求められる．

ここで，確率変数 w_i が互いに独立であると仮定すれば，需要量の同時確率分布 $P(w_1,\ldots,w_n)$ は確率変数 w_i の確率密度 $p_i(w_i)$ を用いて次のように表すことができる．

$$P(w_1,\ldots,w_n) = \prod_i p_i(w_i) \tag{4}$$

3．施設配置の決定基準

各点の需要が確率変数で与えられている場合に施設立地点を決定する基準として下記の5つを考える．まず，考えられるのが移動距離 $T(a)$ の期待値または最大値を最小化する基準である．

(i)　期待移動距離最小化

各点の需要量がとりうる値の集合を W_i とすれば期待移動距離最小化は次のように定式化できる．

$$\min_a \quad E(T(a)) = \int_{W_n}\cdots\int_{W_1}(P\cdot T(a))dw_1\cdots dw_n \tag{5}$$

(ii)　最大移動距離最小化

移動距離が最大になる需要分布をあらかじめ想定し，その時の移動距離を最小化する基準である．

$$\min_a \quad \max_{\{w_1,\cdots,w_n\}} \quad T(a) \tag{6}$$

絶対値基準に対し，施設利用者は最も便利な場所に施設が立地された場合に対して現在の立地点を評価する場合がある．このような相対的評価指標としてリグレットが挙げられる．需要点 i のリグレット r_i は立地点までの距離と最適配置点までの距離との差 $d_i(a)- d_i(a^*)$ によって与えられ，単位需要量あたりのリグレット $R(a)$ （以下，リグレット）は $R(a) = \sum_i w_i r_i(a) \Big/ \sum_i w_i$ と表される．期待リグレット最小化は(i)と同義である(Daskin et al.(1997))．

(iii)　最大リグレット最小化

リグレットが最大になる需要分布に対し，それが最小になるように立地点を決める基準である．

$$\min_a \quad \max_{\{w_1,\cdots,w_n\}} \quad R(a) \tag{7}$$

(iv)　期待非負リグレット最小化

リグレットは相対評価であるが，場所によっては立地点が最適配置でないがために施設までの距離が小さくなる場合もある．決定基準(iv)(v)ではリグレットが正であるような需要点のリグレットのみを算入した非負リグレット $R^+(a)$ を評価指標とする．

点 i の非負リグレット r_i^+ は $\max\{d(a)-d(a^*),0\}$ で表される．リグレット同様，ある立地点 a に対する非負リグレットは $R^+(a) = \sum_i w_i r_i^+(a) \Big/ \sum_i w_i$ となり，この期待値を最小化する基準が考えられる．

$$\min_a \quad E(R^+(a)) = \int_{W_n}\cdots\int_{W_1}(P\cdot R^+(a))dw_1\cdots dw_n \tag{8}$$

(v)　最大非負リグレット最小化

非負リグレットが最大になるような需要分布を想

定した時の非負リグレットを最小化する基準である．

$$\min_{a} \max_{\{w_1,\cdots,w_n\}} R^{+}(a) \tag{9}$$

4．一次元都市に２需要点が分布する時の施設配置

一次元都市[0,1]の両端に需要点があり，各点の需要量 $w_i(i=1,2)$ が$[1-c_i,1+c_i]$において一様分布で表される場合を考える(ただし，$0\leq c_1<c_2\leq 1$)．距離は直線距離と二乗距離について考える．$c_1=0$ とし，c_2を変化させた場合を示している．

直線距離で測るとき最適配置点は需要点１または２のいずれかであり，確率分布は$g(a)=1/2(a=0,1)$でこれ以外では０となる．最適配置点の期待値は 1/2，標準偏差は 1/2 となる．それに対し，二乗距離では確率分布に偏りがあらわれる（図１）．最適配置点の期待値は c_2 が大きくなり w_2 の分散が大きくなるほど需要点１寄りになり，$c_2=1$ のとき $1-\log 3/2\approx 0.45$ となる（図２）．最適配置点の標準偏差は $\sqrt{1/3-\log 3/2}\approx 0.18$ となることから最適配置点が95%の確率で[0.27,0.63]に含まれる．

各決定基準と c_2 の関係を図３に示す．直線距離の決定基準(i)(iv)ではともに $a=0$ で評価値が最小になったが，(ii)(iii)(v)では２つの需要点に対し，中間的立地点がとなった．一方，二乗距離については立地点 a と各決定基準の評価値の関係を c_2 の変化とともに図４から図６に示した．このとき(ii)を除くいずれの決定基準でも立地点は $a=0$ と 1/2 の中間値をとり，w_2 の分散が大きくなるほど，需要点１寄りに立地が決まる．

5．おわりに

本稿では需要が不確実な場合の施設立地を扱い，最適配置点の確率分布を求めることで，需要の不確実性の増加に伴う最適配置点の分散の増加を示した．リグレットのミニマックス基準では需要が確実に決まる需要点に立地点が偏ることを示した．発表当日は $c_1=c_2$ の場合についても結果を示す予定である．

参考文献

[1]Daskin, M.S., Hesse, S. M. and ReVelle, C. S. (1997): α-reliable *p*-minimax regret: A new model for strategic facility location modeling. *Location Science*, **5** (4), 227-246.

[2]Drezner, Z. and Guyse, J. (1999): Application of decision analysis techniques to the Weber facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 116, 69-79.

[3]窪田順次・鈴木 勉(2003): 不確実な需要分布下でのリグレット最小化施設配置問題. OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 54-55.

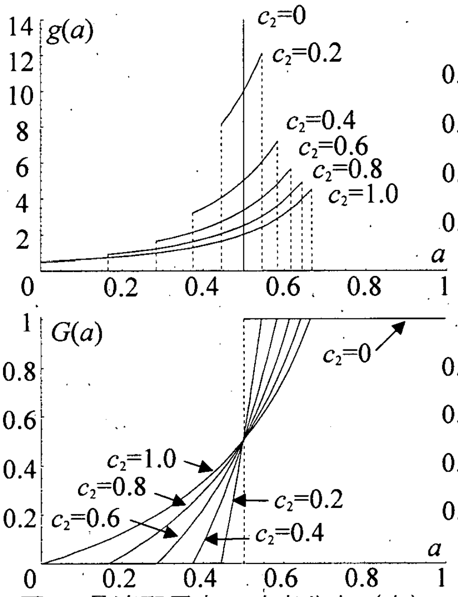

図１ 最適配置点の確率分布（上）と分布関数（下）（二乗距離）

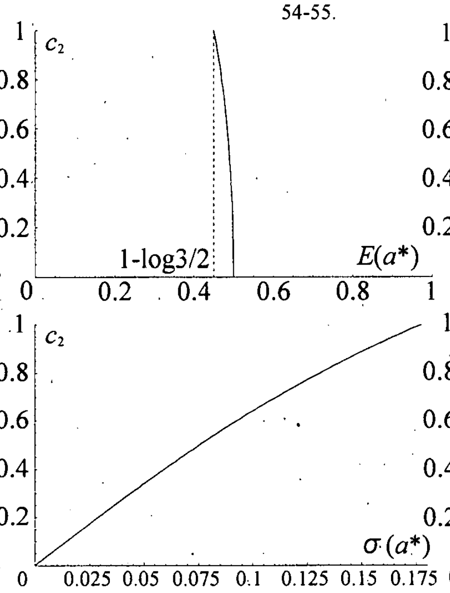

図２ 最適配置点の期待値（上）と標準偏差（下）（二乗距離）

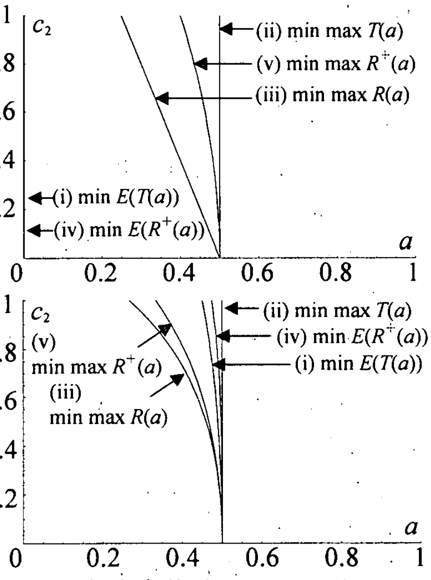

図３ 各決定基準による配置（直線距離（上）・二乗距離（下））

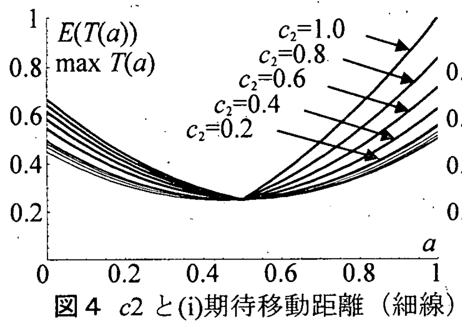

図４ c2 と(i)期待移動距離（細線）(ii)最大移動距離（太線）の関係

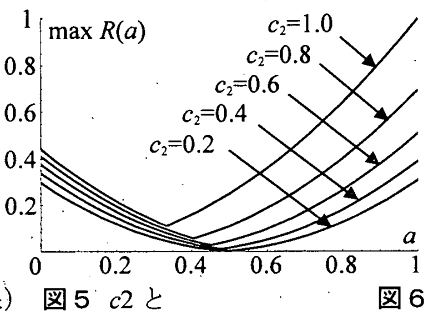

図５ c2 と(iii)最大リグレットの関係

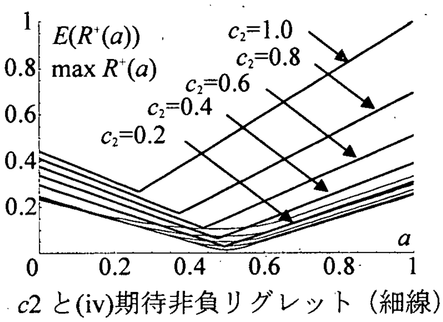

図６ c2 と(iv)期待非負リグレット（細線）(v)最大非負リグレット（太線）の関係